Matice

aneb rovnice, determinanty, lišky a kralíci

Petr Pupík

Aplikace matematiky
Přírodovědecká fakulta

14. května 2015

Obsah

1. Úvod
2. Operace s maticemi
3. Soustavy rovnic
4. Determinant
5. Vlastní čísla matice, vlastní vektory
6. Iterované procesy

Co je to matice

Definice

Matice řádu $m \times n$ je obdélníkové schéma o m řádcích a n sloupcích, ve kterém se vyskytují reálná čísla.

Co je to matice

Definice

Matice řádu $m \times n$ je obdélníkové schéma o m řádcích a n sloupcích, ve kterém se vyskytují reálná čísla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2{,}1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Co je to matice

Definice

Matice řádu $m \times n$ je obdélníkové schéma o m řádcích a n sloupcích, ve kterém se vyskytují reálná čísla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2{,}1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice

Je-li $m = n$, potom říkáme, že je matice čtvercová řádu m.

Co je to matice

Definice

Matice řádu $m \times n$ je obdélníkové schéma o m řádcích a n sloupcích, ve kterém se vyskytují reálná čísla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2{,}1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice

Je-li $m = n$, potom říkáme, že je matice čtvercová řádu m.

Definice

1. Matice ze samých nul se nazývá nulová.
2. Čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde nuly, se nazývá jednotková.

Základní pojmy

Definice

Matice, ve které vyměníme sloupce za řádky, se nazývá matice transponovaná. Je-li původní matice A, potom transponovanou značíme A^T.

Základní pojmy

Definice

Matice, ve které vyměníme sloupce za řádky, se nazývá matice transponovaná. Je-li původní matice A, potom transponovanou značíme A^T.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2{,}1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & -2{,}1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsah

1. Úvod
2. Operace s maticemi
3. Soustavy rovnic
4. Determinant
5. Vlastní čísla matice, vlastní vektory
6. Iterované procesy

Sčítání matic

Definice

Dvě matice stejného typu sčítáme po složkách. Součet matic různých typů nedefinujeme.

Sčítání matic

Definice

Dvě matice stejného typu sčítáme po složkách. Součet matic různých typů nedefinujeme.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -2{,}1 \end{pmatrix}$$

Sčítání matic

Definice

Dvě matice stejného typu sčítáme po složkách. Součet matic různých typů nedefinujeme.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -2{,}1 \end{pmatrix}$$

Příklad

Vypočtete $(A^T + B)^T$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Sčítání matic

Příklad

1. Uveďte příklad dvou nenulových matic, jejichž součtem bude nulová matice.

Sčítání matic

Příklad

1. Uveďte příklad dvou nenulových matic, jejichž součtem bude nulová matice.
2. Uveďte příklad dvou čtvercových matic čtvrtého řádu, jejichž součtem bude jednotková matice.

Sčítání matic

Příklad

1. Uveďte příklad dvou nenulových matic, jejichž součtem bude nulová matice.
2. Uveďte příklad dvou čtvercových matic čtvrtého řádu, jejichž součtem bude jednotková matice.

Sčítání matic

Příklad

1. Uveďte příklad dvou nenulových matic, jejichž součtem bude nulová matice.
2. Uveďte příklad dvou čtvercových matic čtvrtého řádu, jejichž součtem bude jednotková matice.

Definice

Je dána matice A. Matice B taková, že $A + B$ je nulová matice se nazývá matice opačná k matici A.

Sčítání matic

Příklad

1. Uveďte příklad dvou nenulových matic, jejichž součtem bude nulová matice.
2. Uveďte příklad dvou čtvercových matic čtvrtého řádu, jejichž součtem bude jednotková matice.

Definice

Je dána matice A. Matice B taková, že $A + B$ je nulová matice se nazývá matice opačná k matici A.

Definice

Matice, která má všude kolem hlavní diagonály nuly se nazývá diagonální.

Násobení matic

Násobení matic je komplikovanější. Násobit můžeme pouze matici řádu $n \times k$ s maticí řádu $k \times m$. Výsledkem je pak matice řádu $n \times k$.

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Potom $A \cdot B = (c_{ij})$, kde

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} \cdot b_{\alpha i}.$$

Násobení matic

Násobení matic je komplikovanější. Násobit můžeme pouze matici řádu $n \times k$ s maticí řádu $k \times m$. Výsledkem je pak matice řádu $n \times k$.

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Potom $A \cdot B = (c_{ij})$, kde

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} \cdot b_{\alpha i}.$$

Priklad

Vynásobte $A \cdot B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti sčítání a násobení

Vlasnosti

- Sčítání matic je komutativní, asociativní.
- Násobení matic je asociativní, ale není komutativní
- Sčítání a násobení matic je provázáno distributivním zákonem, tj. $(A + B) \cdot C = A \cdot B + B \cdot C$.

Operace s maticemi

Příklad

- Uveďte příklad dvou nenulových čtvercových matic druhého řadu, jejichž součinem bude nulová matice.
- Uveďte příklad dvou čtvercových matic druhého řádu, jejichž součinem bude jednotková matice.
- Uveďte příklad dvou matic A, B, tak aby byl součin $A \cdot B$ definován, ale nebyl definován součin $B \cdot A$.

Operace s maticemi

Příklad

- Uveďte příklad dvou nenulových čtvercových matic druhého řadu, jejichž součinem bude nulová matice.
- Uveďte příklad dvou čtvercových matic druhého řádu, jejichž součinem bude jednotková matice.
- Uveďte příklad dvou matic A, B, tak aby byl součin $A \cdot B$ definován, ale nebyl definován součin $B \cdot A$.

Definice

Nechť je dána čtvercová matice A. Čtvercovou matici B nazveme inverzní maticí k matici A, jestliže $A \cdot B$ i $B \cdot A$ je jednotková matice.

Inverzní matice

Příklad

Určete inverzní matici k matici A, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení

Příklad

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete:

1. $2A^T + C$
2. $D^T \cdot E^T - (E \cdot D)^T$
3. $(A \cdot B) \cdot C$
4. $A \cdot (B \cdot C)$
5. $C^T \cdot A^T + 2E^T$
6. $D^T - E^T$

Cvičení

Příklad

K dané matici nalezněte matici inverzní

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Cvičení

Příklad

K dané matici nalezněte matici inverzní

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Priklad

Uveďte příklad čtvercové matice, ke které neexistuje matice inverzní.

Obsah

1. Úvod
2. Operace s maticemi
3. Soustavy rovnic
4. Determinant
5. Vlastní čísla matice, vlastní vektory
6. Iterované procesy

Soustavy rovnic a matice

Definice

Elementární řádkové úpravy

Příklad

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

Soustavy rovnic a matice

Definice

Elementární řádkové úpravy

Příklad

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

Příklad

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & - & 3x_4 & + & 9x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \end{array}$$

Obsah

1 Úvod

2 Operace s maticemi

3 Soustavy rovnic

4 Determinant

5 Vlastní čísla matice, vlastní vektory

6 Iterované procesy

Determinant

Determinant matice je zobrazení, které každé čtvercové matici přiřadí nějaké reálné číslo. Obecná definice je komplikovaná, my si vystačíme s definicí determinantu pro matice druhého a třetího řadu.

Determinant

Determinant matice je zobrazení, které každé čtvercové matici přiřadí nějaké reálné číslo. Obecná definice je komplikovaná, my si vystačíme s definicí determinantu pro matice druhého a třetího řadu.

Definice

Determinant matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je roven $|A| = ad - bc$.

Determinant

Determinant matice je zobrazení, které každé čtvercové matici přiřadí nějaké reálné číslo. Obecná definice je komplikovaná, my si vystačíme s definicí determinantu pro matice druhého a třetího řadu.

Definice

Determinant matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je roven $|A| = ad - bc$.

Definice - Sarrusovo pravidlo

Determinant matice třetího řádu je roven rozdílu součtu součinů prvků na hlavních diagonálách a součtu součinů prvků na vedlejších diagonálách.

Determinant

Příklad

Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinanty a soustavy

Cramerovo pravidlo

Má-li soustava rovnic právě jedno řešení, potom ho můžeme nalézt tak, že
$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, kde A je matice soustavy, A_i je matice soustavy, kde místo i-tého sloupce je sloupec pravých stran soustavy.

Determinanty a soustavy

Cramerovo pravidlo

Má-li soustava rovnic právě jedno řešení, potom ho můžeme nalézt tak, že
$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, kde A je matice soustavy, A_i je matice soustavy, kde místo i-tého sloupce je sloupec pravých stran soustavy.

Pomocí Cramerova pravidla řešte danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Obsah

1. Úvod
2. Operace s maticemi
3. Soustavy rovnic
4. Determinant
5. Vlastní čísla matice, vlastní vektory
6. Iterované procesy

Vlastní čísla

Nyní se budeme chtít naučit počítat vysoké mocniny některých matic. To potom využijeme právě u populačních modelů.

Definice

Nechť je dána čtvercová matice A. Potom determinant matice, kde k prvkům hlavní diagonály matice A dopíšeme „$-x$“, nazýváme charakteristický polynom. Kořeny tohoto polynomu nazýváme vlastní čísla.

Vlastní čísla

Nyní se budeme chtít naučit počítat vysoké mocniny některých matic. To potom využijeme právě u populačních modelů.

Definice

Nechť je dána čtvercová matice A. Potom determinant matice, kde k prvkům hlavní diagonály matice A dopíšeme „$-x$“, nazýváme charakteristický polynom. Kořeny tohoto polynomu nazýváme vlastní čísla.

Určete vlastní čísla matic

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory

Matice řádu n může mít až n různých vlastních čísel. Jestliže dosadíme i-té vlastní číslo za x, dostaneme matici A_i.

Definice

Vektor (u_1, u_2, u_3) splňující

$$A_i \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu.

Vlastní vektory

Matice řádu n může mít až n různých vlastních čísel. Jestliže dosadíme i-té vlastní číslo za x, dostaneme matici A_i.

Definice

Vektor (u_1, u_2, u_3) splňující

$$A_i \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu.

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vlastní vektory

Matice řádu n může mít až n různých vlastních čísel. Jestliže dosadíme i-té vlastní číslo za x, dostaneme matici A_i.

Definice

Vektor (u_1, u_2, u_3) splňující

$$A_i \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu.

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad

Určete vlastní vektory matic z předešlého slidu.

Vlastní vektory

Definice

Násobnost vlastního čísla nazýváme algebraická násobnost. „Počet“ vektorů příslušných danému vlastnímu číslu nazýváme geometrická násobnost vlastního čísla.

Vlastní vektory

Definice

Násobnost vlastního čísla nazýváme algebraická násobnost. „Počet“ vektorů příslušných danému vlastnímu číslu nazýváme geometrická násobnost vlastního čísla.

Tvrzení, aneb zlatý hřeb

Má-li matice A řádu n celkem n vlastních vektorů, potom se tato matice nazývá diagonalizovatelná a platí, že

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1},$$

kde D je diagonální matice, kde na diagonále jsou hlavní čísla, a P je matice, kde ve sloupcích jsou vlastní vektory.

Platí, že $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.

Vlastní vektory

Příklad

Vypočtěte A^3, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obsah

1 Úvod

2 Operace s maticemi

3 Soustavy rovnic

4 Determinant

5 Vlastní čísla matice, vlastní vektory

6 Iterované procesy

Populační modely

Příklad

Předpokládejme, že v populačním modelu liška–králík je vztah mezi počtem lišek L_k a králíků K_k v daném a následujícím měsíci následovný:

$$L_{k+1} = 0.8L_k + 0.4K_k, \qquad (1)$$

$$K_{k+1} = -0.05L_k + 1.1K_k \qquad (2)$$

Určete limitní chování populace, je-li $L_0 = 100$, $K_0 = 100$.

Populační modely

Příklad

Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel. Uvažujme tři základní regiony v této oblasti – centrum, sever, jih. Z centra se na sever každý rok přestěhuje 10% obyvatel a z centra na jih 5% obyvatel. Ze severu se do centra každý rok přestěhuje 5% obyvatel a ze severu na jih také 5% obyvatel. A konečně z jihu se každý rok přestěhuje 10% obyvatel do centra a 15% obyvatel na sever. Označme jako c_k, s_k, j_k počet obyvatel v regionu centrum, sever, jih v roce k. Sestavte příslušný iterační model a určete jeho matici. Dále již s tímto modelem nic nepočítejte.