Osnova přednášky Vícerozměrné analogie t-testů

I. Úlohy o jednom náhodném výběru z vícerozměrného rozložení

1. Charakteristiky p-rozměrného rozložení
2. Odhady charakteristik p-rozměrného rozložení
3. Základní poznatky o p-rozměrném normálním rozložení
4. Náhodný výběr z p-rozměrného normálního rozložení
5. Test hypotézy o vektoru středních hodnot
   Příklad na vícerozměrný jednovýběrový t-test
6. Test hypotézy o úplné nezávislosti sledovaných proměnných
   Příklad na test hypotézy o úplné nezávislosti sledovaných proměnných

II. Úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z vícerozměrného rozložení

1. Test hypotézy o rozdílu vektorů středních hodnot
2. Test hypotézy o shodě variančních matic
3. Příklad na Hotellingův T^2 test

Vícerozměrné analogie t-testů

I. Úlohy o jednom náhodném výběru z vícerozměrného rozložení

1. Charakteristiky p-rozměrného rozložení

Náhodný vektor $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ pochází z p-rozměrného rozložení s vektorem středních hodnot

$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}$, varianční maticí

$$\operatorname{var}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} D(X_1) & C(X_1, X_2) & \dots & C(X_1, X_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(X_p, X_1) & C(X_p, X_1) & \dots & D(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix},$$

a korelační maticí

$$\operatorname{cor}\mathbf{X} = \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & R(X_1, X_2) & \dots & R(X_1, X_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(X_p, X_1) & R(X_p, X_1) & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(Matice var **X**, cor **X** jsou symetrické, cor **X** se dá vypočítat z var **X**: $\rho_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\sigma_j \sigma_k}$.)

Počet charakteristik p-rozměrného rozložení tedy je:
p středních hodnot,
p rozptylů,
$\frac{p(p-1)}{2}$ kovariancí (kovariance je symetrická).

Celkem: $2p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p^2 + 3p}{2}$.

Vidíme, že počet charakteristik roste kvadraticky s počtem složek náhodného vektoru. Např. pro p = 2 je jich $\frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2} = 5$, ale pro p = 10 už jich je $\frac{10^2 + 3 \cdot 10}{2} = 65$.

2. Odhady charakteristik p-rozměrného rozložení

Vektor středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$ a varianční matici $\boldsymbol{\Sigma}$ v praxi většinou neznáme, musíme je odhadnout na základě náhodného výběru. Pořídíme náhodný výběr $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ (kde $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ip})^T$, $i = 1, \ldots, n$) z p-rozměrného rozložení s vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$ a varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Z těchto n náhodných vektorů utvoříme náhodnou matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{np} \end{pmatrix}.$$

K číselné realizaci této náhodné matice dospějeme tak, že na n objektech zjišťujeme hodnoty p proměnných. Např. náhodně vybereme n = 31 návštěvníků posilovny a zjišťujeme u nich hodnoty p = 4 proměnných: věk (v letech), hmotnost (v kg), doba cvičení (v min), maximální tep.

Znamená to, že i-tý objekt je charakterizován p-rozměrným vektorem pozorování $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})^T$, $i = 1, \ldots, n$. Vektory pozorování uspořádáme do datové matice

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix},$$ kde řádky odpovídají jednotlivým objektům a sloupce proměnným.

V našem případě máme datovou matici tvaru:

	1 věk	2 hmotnost	3 doba cvičení	4 max. tep
1	51	75,1	12,6	180
2	48	81,1	11,2	161
3	46	78	9,6	171
4	44	72,6	8,9	157
5	45	69	11,1	175
6	48	93,3	12,9	172
7	45	75,4	10,5	191
8	51	60,8	9,9	153
9	43	78	9,4	196
10	42	62,9	11,5	178
11	46	84,5	10,5	174
12	38	74,7	10,1	177
13	39	89,4	14	190
14	39	68,2	11,1	189
15	41	80,9	10,6	169
16	48	84,8	10,3	179
17	43	83,1	9	193
18	45	71,3	11	176
19	45	79,6	10	171
20	42	93,3	10,3	168
21	43	75,1	10,1	179
22	38	91,2	11,4	185
23	34	76,8	10,1	194
24	38	87,5	8,7	162
25	36	69,9	8,2	173
26	32	90,7	9,2	185
27	41	79,2	11,6	184
28	34	77,7	12	186
29	37	82,9	10,9	168
30	38	83,1	13,1	184
31	32	83,6	8,6	179

Zavedeme následující označení:

$M_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$ … výběrový průměr j-té proměnné, $j = 1, \ldots, p$

$\mathbf{M} = \left(M_1 \quad \ldots \quad M_p\right)^T$ … vektor výběrových průměrů

(V našem případě: $\mathbf{m} = \left(41{,}7 \quad 79{,}2 \quad 10{,}6 \quad 177{,}4\right)^T$, tedy průměrný věk je 41,7 roku, průměrná hmotnost je 79,2 kg, průměrná doba cvičení je 40,6 min a průměrný maximální tep je 177,4.)

$S_j^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij} - M_j\right)^2$ … výběrový rozptyl j-té proměnné, $j = 1, \ldots, p$

$S_{jk} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij} - M_j\right)\left(X_{ik} - M_k\right)$… výběrová kovariance j-té a k-té proměnné, $j, k = 1, \ldots, p$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1^{\,2} & S_{12} & \ldots & S_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{p1} & S_{p2} & \ldots & S_p^{\,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{M}\right)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{M}\right)^T$$ … výběrová varianční matice

(Matice $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{M}\right)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{M}\right)^T = \left(n-1\right)\mathbf{S}$ se nazývá Wishartova matice.)

(V našem případě: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 27{,}16 & -10{,}16 & 1{,}34 & -21{,}20 \\ & 69{,}24 & 1{,}71 & 12{,}02 \\ & & 1{,}92 & 3{,}40 \\ & & & 118{,}31 \end{pmatrix}$.)

$R_{jk} = \frac{S_{jk}}{S_j S_k}$ … výběrový koeficient korelace j-té a k-té proměnné, $j, k = 1, \ldots, p$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & R_{12} & \ldots & R_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{p1} & R_{p2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ … výběrová korelační matice

(V našem případě: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}23 & 0{,}19 & -0{,}37 \\ & 1 & 0{,}15 & 0{,}13 \\ & & 1 & 0{,}23 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, tedy věk záporně koreluje s hmotností a tepem, ale kladně s dobou cvičení, hmotnost kladně koreluje s dobou cvičení a tepem a doba cvičení kladně koreluje s tepem.)

Lze dokázat, že

- vektor výběrových průměrů $\mathbf{M}$ je nestranným odhadem vektoru středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$, tj. $\mathrm{E}(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\mu}$;
- výběrová varianční matice $\mathbf{S}$ je nestranným odhadem variační matice $\boldsymbol{\Sigma}$, tj. $\mathrm{E}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\Sigma}$;
- výběrová korelační matice $\mathbf{R}$ je vychýleným odhadem korelační matice $\boldsymbol{\rho}$, tj. $\mathrm{E}(\mathbf{R}) \approx \boldsymbol{\rho}$.

Poznámka: V některých situacích pracujeme s lineární kombinací složek náhodného vektoru $\mathbf{X}$: $c_1 X_1 + \ldots + c_p X_p = \mathbf{c}^T \mathbf{X}$. Pak střední hodnota náhodné veličiny $\mathbf{c}^T \mathbf{X}$ je $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\mu}$ a rozptyl je $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}$. Nestranným odhadem střední hodnoty $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\mu}$ je $\mathbf{c}^T \mathbf{M}$ a nestranným odhadem rozptylu $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}$ je $\mathbf{c}^T \mathbf{S} \mathbf{c}$.

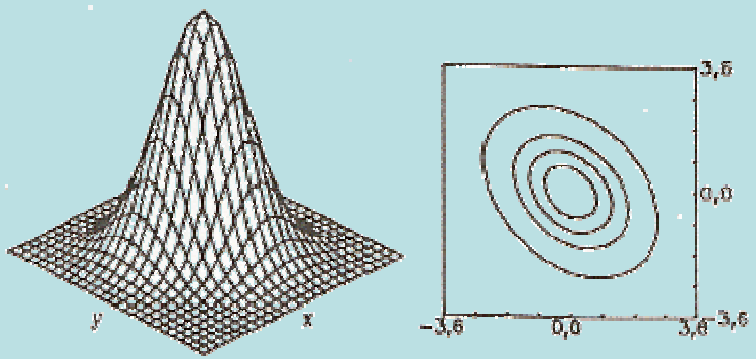
3. Základní poznatky o p-rozměrném normálním rozložení

Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ se řídí p-rozměrným normálním rozložením $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde parametr $\boldsymbol{\mu}$ je vektor středních hodnot a parametr $\boldsymbol{\Sigma}$ je varianční matice, když jeho hustota má tvar:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}.$$

Ilustrace pro dvourozměrné normální rozložení

Graf hustoty a vrstevnice dvourozměrného normálního rozložení s parametry $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$, $\rho = -0{,}75$:



Důležité vlastnosti p-rozměrného normálního rozložení:

a) Všechna marginální (a podmíněná) rozložení jsou normální.
b) Lineární transformací $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}$, kde $\mathbf{a}$ je p-rozměrný sloupcový reálný vektor a $\mathbf{B}$ je reálná čtvercová matice řádu p, se normalita neporuší: $\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}_p\left(\mathrm{a} + \mathrm{B}\boldsymbol{\mu}, \mathrm{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\right)$
c) Je-li varianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ diagonální, jsou náhodné veličiny $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p$ stochasticky nezávislé.
d) Sečteme-li n stochasticky nezávislých p-rozměrných náhodných vektorů, z nichž každý se řídí p-rozměrným normálním rozložením, pak výsledný součet má také p-rozměrné normální rozložení.

4. Náhodný výběr z p-rozměrného normálního rozložení

Nechť náhodný výběr $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ pochází z rozložení $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Označme $\mathbf{M}$ vektor výběrových průměrů a $\mathbf{S}$ výběrovou varianční matici. Pak platí:

a) Wishartova matice $\mathbf{W} = (n-1)\mathbf{S}$ má p-rozměrné Wishartovo rozložení s n-1 stupni volnosti a parametrem $\boldsymbol{\Sigma}$, píšeme $\mathbf{W} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$. (Wishartovo rozložení je zobecněním χ^2- rozložení. Je-li p = 1 a $\boldsymbol{\Sigma} = (1)$, jde o rozložení $\chi^2(n-1)$.)

b) Statistika $T^2 = n(\mathbf{M}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{M}-\boldsymbol{\mu})$ má Hotellingovo rozložení s p a n-1 stupni volnosti, píšeme $T^2 \sim T^2(p, n-1)$. (Hotellingovo rozložení je zobecněním Studentova rozložení.)

Poznámka: Mezi Hotellingovým a Fisherovým – Snedecorovým rozložením platí vztah:

$X \sim T^2(\nu_1, \nu_2) \Rightarrow Y = \frac{\nu_2 - \nu_1 + 1}{\nu_1 \nu_2} X \sim F(\nu_1, \nu_2 - \nu_1 + 1)$. Statistiku T^2 tedy můžeme transformovat na statistiku s F-S rozložením:

$$\frac{n-p}{p(n-1)} T^2 = \frac{n(n-p)}{p(n-1)} (\mathbf{M}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{M}-\boldsymbol{\mu}) \sim F(p, n-p).$$

5. Test hypotézy o vektoru středních hodnot

Tento test je p-rozměrnou analogií jednovýběrového t-testu. Pro připomenutí:

Náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ pochází z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde parametry μ, σ^2 neznáme. Na hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \mu = c$ proti alternativě $H_1 : \mu \neq c$.

Testová statistika: $T_0 = \dfrac{M - c}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$ se za platnosti H_0 řídí rozložením $t(n-1)$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$.

Jestliže $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

Poznámka: Vzhledem k tomu, že platí tvrzení: $X \sim t(n) \Rightarrow Y = X^2 \sim F(1, n)$, můžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti α, když $t_0^{\,2} \in \langle F_{1-\alpha}(1, n-1), \infty)$.

p-rozměrný případ:

Náhodný výběr $\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X}_n$ pochází z rozložení $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde parametry $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ neznáme. Na hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{c}$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{c}$, kde $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_p)^T$ je vektor reálných konstant. (Alternativa vlastně tvrdí, že aspoň jedna složka vektoru středních hodnot neodpovídá ověřovanému předpokladu.)

Testová statistika $T_0 = \frac{n(n-p)}{p(n-1)}(\mathbf{M}-\mathbf{c})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{M}-\mathbf{c})$ se za platnosti H_0 řídí rozložením $F(p, n-p)$.

Kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p), \infty)$.

Jestliže $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

Poznámka: Test $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{c}$ proti $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{c}$ nelze nahradit p jednorozměrnými t-testy $H_{0j} : \mu_j = c_j$ proti $H_{1j} : \mu_j \neq c_j$, $j = 1, \ldots, p$, protože při tomto postupu by pravděpodobnost chyby 1. druhu byla větší než α, dokonce až $1-(1-\alpha)^p$.

Pokud na dané hladině významnosti α zamítneme vícerozměrnou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{c}$ ve prospěch alternativy $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{c}$, zjistíme, vzhledem ke kterým složkám vektoru $\boldsymbol{\mu}$ byla nulová hypotéza zamítnuta.

K tomu lze použít p jednorozměrných t-testů $H_{0j} : \mu_j = c_j$ proti $H_{1j} : \mu_j \neq c_j$, $j = 1, \ldots, p$, u nichž hladinu významnosti α upravíme pomocí Bonferroniho korekce:

H_{0j} zamítneme na hladině významnosti α, když vypočtená p-hodnota bude $\leq \frac{\alpha}{p}$.

Příklad na vícerozměrný jednovýběrový t-test

Výrobce určitého typu součástek uvádí, že nejdůležitější čtyři rozměry nabývají těchto hodnot: 9,50 mm, 6,35 mm, 5,98 mm a 4,40 mm. Náhodně bylo vybráno 15 součástek, byly u nich zjištěny hodnoty těchto rozměrů a zapsány do proměnných X1, X2, X3, X4. Údaje jsou uloženy v souboru soucastky.sta.

Za předpokladu, že data pocházejí ze čtyřrozměrného normálního rozložení s neznámým vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4)^T$ a neznámou varianční maticí

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{pmatrix},$$

na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že tvrzení výrobce je pravdivé. V případě zamítnutí nulové hypotézy zjistěte, které rozměry přispěly k jejímu zamítnutí.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}50 \\ 6{,}35 \\ 5{,}98 \\ 4{,}40 \end{pmatrix}$

proti alternativě H_1: $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 9{,}50 \\ 6{,}35 \\ 5{,}98 \\ 4{,}40 \end{pmatrix}$.

Hodnotu testové statistiky $T_0 = \frac{n(n-p)}{p(n-1)}(\mathbf{M}-\mathbf{c})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{M}-\mathbf{c})$ a odpovídající p-hodnotu vypočteme pomocí systému STATISTICA.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – t-test, samost. vzorek – OK – Proměnné X1, X2, X3, X4 – OK – záložka Možnosti – zvolíme Test průměrů vůči různým volitelným konstantám Specif. X1: 9,5, X2: 6,35, X3: 5,98, X4: 4,4 – OK – zaškrtneme Vícerozměrný test (Hotellingovo T^2) – Výpočet. Dostaneme výstupní tabulku:

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě) (soucastky.sta) T2(celé případy ChD)=19,2432 F(4,11)=3,7799 p<,03597							
	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
X1	9,491833	0,010695	15	0,002761	9,500000	-2,95748	14	0,010391
X2	6,357433	0,011481	15	0,002964	6,350000	2,50752	14	0,025099
X3	5,981467	0,011129	15	0,002873	5,980000	0,51043	14	0,617706
X4	4,400327	0,007024	15	0,001814	4,400000	0,18011	14	0,859646

Testová statistika vícerozměrného jednovýběrového t-testu se realizuje hodnotou 3,7799, odpovídající p-hodnota je 0,03597, tedy s rizikem omylu nejvýše 5 % považujeme za prokázané, že rozměry součástky neodpovídají deklarovaným hodnotám.
Protože jsme zamítli nulovou hypotézu, v dalším kroku zjistíme, které rozměry přispěly k jejímu zamítnutí. Budeme tedy simultánně testovat hypotézy $H_{01}: \mu_1 = 9,5$, $H_{02}: \mu_2 = 6,35$, $H_{03}: \mu_3 = 5,98$, $H_{04}: \mu_4 = 4,4$ proti $H_{11}: \mu_1 \neq 9,5$, $H_{12}: \mu_2 \neq 6,35$, $H_{13}: \mu_3 \neq 5,98$, $H_{14}: \mu_4 \neq 4,4$. H_{0j} zamítneme na hladině významnosti $\alpha = 0,05$, když vypočtená p-hodnota bude menší nebo rovna $\frac{\alpha}{\text{počet testů}} = \frac{0,05}{4} = 0,0125$. Vidíme, že vícerozměrná hypotéza byla zamítnuta kvůli X1.

6. Test hypotézy o úplné nezávislosti sledovaných proměnných

Řada statistických úloh vede na zkoumání závislosti mezi p sledovanými proměnnými. Nejdříve by se mělo zjistit, zda se nejedná o systém nezávislých proměnných. V takovém případě by bylo zbytečné pokračovat v analýze závislostí.

Na hladině významnosti 0,05 testujeme $H_0 : \mathrm{cor}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ proti $H_0 : \mathrm{cor}\mathbf{X} \neq \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu p).

Testová statistika $T_0 = -n \ln|\mathbf{R}|$ se za platnosti H_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$.

Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{p(p-1)}{2}\right), \infty\right)$

Jestliže $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

Poznámka: Aproximaci χ^2-rozložením můžeme zpřesnit, když testovou statistiku T_0 vynásobíme konstantou $1 - \frac{2p+11}{6n}$.

6. Test hypotézy o úplné nezávislosti sledovaných proměnných

Řada statistických úloh vede na zkoumání závislosti mezi p sledovanými proměnnými. Nejdříve by se mělo zjistit, zda se nejedná o systém nezávislých proměnných. V takovém případě by bylo zbytečné pokračovat v analýze závislostí.

Na hladině významnosti 0,05 testujeme $H_0 : \mathrm{cor}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ proti $H_0 : \mathrm{cor}\mathbf{X} \neq \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu p).

Testová statistika $T_0 = -n \ln|\mathbf{R}|$ se za platnosti H_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$.

Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{p(p-1)}{2}\right), \infty\right)$

Jestliže $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

Poznámka: Aproximaci χ^2-rozložením můžeme zpřesnit, když testovou statistiku T_0 vynásobíme konstantou $1 - \frac{2p+11}{6n}$.

Příklad: Na základě dat z příkladu o rozměrech součástek testujte hypotézu, že mezi sledovanými čtyřmi rozměry není žádná závislost.

Řešení:
Logaritmus determinantu výběrové korelační matice získáme v systému STATISTICA takto: Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Hlavní komponenty & klasifikační analýza – Proměnné X1, X2, X3, X4 – OK – OK – Popis. statistiky – Korelační matice Inverzní.

	Inverzní korelační matice (soucastky.sta) Aktivní proměnné Log(Determinant) korelační matice: -,10371221			
Proměnná	X1	X2	X3	X4
X1	1,051183	-0,116527	-0,221930	0,034663
X2	-0,116527	1,065407	0,229398	0,101462
X3	-0,221930	0,229398	1,089346	-0,038291
X4	0,034663	0,101462	-0,038291	1,014320

V záhlaví výstupní tabulky je číslo $\ln|\mathbf{R}| = -0{,}10371221$.

K dalším výpočtům použijeme STATISTIKU jako inteligentní kalkulačku.
Otevřeme nový datový soubor o 3 proměnných a 1 případu. Do Dlouhého jména 1. proměnné napíšeme =-0,103712221 (tj. $\ln|\mathbf{R}|$), do Dlouhého jména druhé proměnné napíšeme =-15*v1 (tj. $T_0 = -n \ln|\mathbf{R}|$) a Dlouhého jména třetí proměnné napíšeme =VCHi2(0,95;6) (tj. kvantil $\chi^2_{0,95}(6)$).

	1 Prom1	2 Prom2	3 Prom3
1	-0,1037122	1,55568315	12,5915872

Protože testová statistika 1,5557 nepatří do kritického oboru $\langle 12{,}5916; \infty)$, hypotézu o úplné nezávislosti čtyř rozměrů součástek nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

II. Úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z vícerozměrného rozložení

1. Test hypotézy o rozdílu vektorů středních hodnot

Tento test je p-rozměrnou analogií dvouvýběrového t-testu. Pro připomenutí:
Náhodný výběr $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ pochází z rozložení $N(\mu_1,\sigma^2)$, na něm nezávislý náhodný výběr $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ pochází z rozložení $N(\mu_2,\sigma^2)$, přičemž parametry μ_1,μ_2,σ^2 neznáme. Označíme M_1, M_2 výběrové průměry, $S_1^{\,2}, S_2^{\,2}$ výběrové rozptyly, $S_*^{\,2} = \dfrac{(n_1-1)S_1^{\,2}+(n_2-1)S_2^{\,2}}{n_1+n_2-2}$ vážený průměr výběrových rozptylů. Na hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Testová statistika: $T_0 = \dfrac{M_1 - M_2}{S_*\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ se za platnosti H_0 řídí rozložením $t(n_1+n_2-2)$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2), \infty)$.

Jestliže $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

Upozornění: Předpoklad, že rozptyly obou rozložení jsou shodné (tj. test nulové hypotézy $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti alternativě $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$) ověřujeme F-testem.

Testová statistika $T_0 : \frac{S_1^2}{S_2^2}$ se v případě platnosti H_0 řídí rozložením $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Kritický obor: $W = \langle 0, F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) \rangle \cup \langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty)$.

Jestliže $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

p- rozměrný případ (Hotellingův T^2 test)

Máme náhodný výběr $\mathbf{X}_{11},\ldots,\mathbf{X}_{1n_1}$ (kde $\mathbf{X}_{1i}=\left(X_{1i1},\ldots,X_{1ip}\right)^T$, $i=1,\ldots,n_1$) z $N_p\left(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Sigma}\right)$ a dále na něm nezávislý náhodný výběr $\mathbf{X}_{21},\ldots,\mathbf{X}_{2n_2}$ (kde $\mathbf{X}_{2i}=\left(X_{2i1},\ldots,X_{2ip}\right)^T$, $i=1,\ldots,n_2$) z $N_p\left(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}\right)$, přičemž parametry $\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}$ neznáme.

Zavedeme označení:

$n=n_1+n_2$ … celkový rozsah obou výběrů

$M_{hj}=\frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}X_{hij}$ … výběrový průměr j-té proměnné v h-tém výběru, $h=1,2,\ j=1,\ldots,p$

$\mathbf{M}_h=\left(M_{h1}\quad\ldots\quad M_{hp}\right)^T$ … vektor výběrových průměrů v h-tém výběru, $h=1,2$

$\mathbf{S}_h=\frac{1}{n_h-1}\sum_{i=1}^{n_h}\left(\mathbf{X}_{hi}-\mathbf{M}_h\right)\left(\mathbf{X}_{hi}-\mathbf{M}_h\right)^T$ … výběrová varianční matice v h-tém výběru, $h=1,2$

$\mathbf{S}=\frac{\left(n_1-1\right)\mathbf{S}_1+\left(n_2-1\right)\mathbf{S}_2}{n-2}$ … společná výběrová varianční matice

Na hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$.

Statistika $\frac{n_1 n_2}{n}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$ se řídí Hotellingovým rozložením $T^2(p, n-2)$, když H_0 platí.

Vzhledem ke vztahu mezi Hotellingovým a F-S rozložením vynásobíme tuto statistiku konstantou $\frac{n-p-1}{p(n-2)}$ a získáme testovou statistiku:

$T_0 = \frac{n-p-1}{p(n-2)} \cdot \frac{n_1 n_2}{n}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$, která se za platnosti H_0 řídí rozložením $F(p, n-p-1)$.

Kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty)$.

Jestliže $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

2. Test hypotézy o shodě variančních matic

Předpoklad o shodě variančních matic můžeme ověřit pomocí Boxova M-testu.
Na hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$.

Testová statistika má tvar: $T_0 = \frac{1}{C_p}\left[(n-2)\ln|\mathbf{S}| - (n_1-1)\ln|\mathbf{S}_1| - (n_2-1)\ln|\mathbf{S}_2|\right]$, kde

$C_p = 1 + \frac{2p^2+3p-1}{6(p+1)}\left(\frac{1}{n_1-1} + \frac{1}{n_2-1} - \frac{1}{n-2}\right)$ je konstanta zlepšující aproximaci.

V případě platnosti H_0 se statistika T_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$. Pokud

$t_0 \in \left\langle \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{p(p+1)}{2}\right), \infty\right)$, hypotézu o shodě variančních matic zamítneme na asymptotické hladině významnosti α. Aproximace je vyhovující, když rozsahy výběrů jsou aspoň 20 a počet proměnných je nejvýše 5.

V případě, že rozsahy výběrů jsou shodné, nemusíme Boxův test provádět.

Simultánní t-testy:

Pokud na dané hladině významnosti α zamítneme hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ ve prospěch alternativy $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$, zjistíme, které proměnné jsou příčinou jejího zamítnutí.
V této situaci provedeme p simultánních testů $H_{0j} : \mu_{1j} = \mu_{2j}$ proti $H_{1j} : \mu_{1j} \neq \mu_{2j}$, $j = 1, \ldots, p$ pomocí testové statistiky $T_{0j} = \frac{n-p-1}{p(n-2)} \cdot \frac{n_1 n_2}{n} \cdot \frac{(M_{1j} - M_{2j})^2}{S_{*j}^{\,2}}$, která se za platnosti H_{0j} řídí rozložením $F(p, n-p-1)$.

Kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty)$.
Jestliže $t_{0j} \in W$, H_{0j} zamítáme na hladině významnosti α.

Příklad na Hotellingův T^2 test

23 náhodně vybraných mužů a 22 náhodně vybraných žen mělo posoudit podobné výrobky od tří firem – označme je A, B, C – na škále 0 bodů (naprosto nevyhovující) až 10 bodů (zcela vyhovující). Výsledky jsou uloženy v souboru hodnoceni_vyrobku.sta.
Za předpokladu, že data tvoří realizace dvou nezávislých náhodných výběrů ze dvou třírozměrných normálních rozložení se stejnými variančními maticemi, Hotellingovým T^2 testem ověřte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že hodnocení mužů a žen se neliší. Pokud dojde k zamítnutí nulové hypotézy, zjistěte, které firmy se v hodnocení mužů a žen liší.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu

$$H_0: \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{pmatrix} \text{ proti alternativě } H_1: \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{pmatrix}.$$

Hodnotu testové statistiky $T_0 = \frac{n-p-1}{p(n-2)} \cdot \frac{n_1 n_2}{n} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$ a odpovídající p-hodnotu vypočteme pomocí systému STATISTICA.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK – Proměnné – Závisle proměnné X1, X2, X3, Grupovací proměnná ID – OK – na záložce Možnosti zaškrtneme Vícerozměrný test (Hotellingovo T^2) – Výpočet

Proměnná	t-testy; grupováno: ID: pohlaví respondenta (hodnoceni_vyrobku.sta) Skup. 1: muž; Skup. 2: žena Hotellingovo 15,5599 F(3,41)=4,9454 p<,00506										
	Průměr muž	Průměr žena	t	sv	p	Poč.plat muž	Poč.plat. žena	Sm.odch. muž	Sm.odch. žena	F-poměr Rozptyly	p Rozptyly
X1	5,086957	4,545455	0,697666	43	0,489142	23	22	2,574579	2,631807	1,044950	0,917081
X2	5,434783	3,818182	2,098562	43	0,041766	23	22	2,642762	2,519190	1,100510	0,829044
X3	5,304348	3,045455	3,117687	43	0,003246	23	22	2,770540	2,011332	1,897411	0,147512

Testová statistika Hotellingova testu nabývá hodnoty 4,9454, odpovídající p-hodnota je menší než 0,00506, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že vektory středních hodnot proměnných X1, X2, X3 jsou v obou skupinách shodné. S rizikem omylu nejvýše 5 % jsme tedy prokázali, že mezi muži a ženami existuje rozdíl v hodnocení výrobků tří firem. (Vidíme, že hodnocení mužů je příznivější než hodnocení žen.)

Nyní pomocí simultánních testů zjistíme, které firmy jsou rozdílně hodnoceny muži a ženami.

Simultánní testy založené na statistice $T_{0j} = \frac{n-p-1}{p(n-2)} \cdot \frac{n_1 n_2}{n} \cdot \frac{(M_{1j} - M_{2j})^2}{S_{*j}^{\ 2}}$ STATISTICA neposkytuje. (V našem případě n = 45, p = 3, n_1 = 23, n_2 = 22, tedy $\frac{n-p-1}{p(n-2)} \cdot \frac{n_1 n_2}{n} = \frac{20746}{5805}$.)

S pomocí STATISTIKY však můžeme vypočítat vektory výběrových průměrů a směrodatných odchylek. V této tabulce ponecháme pouze proměnné obsahující průměry a směrodatné odchylky. Dále za poslední proměnnou vložíme dvě nové proměnné T_{0j} a kvantil. Do Dlouhého jména proměnné T_{0j} napíšeme:
=(20746/5805)*(v1-v2)^2/((22*v3^2+21*v4^2)/45)
Do Dlouhého jména proměnné kvantil napíšeme:
=VF(0,95;3;41)

Proměnná	t-testy; grupováno: ID: pohlaví respondenta (hodnoceni_vyrobku.sta) Skup. 1: muž; Skup. 2: žena Hotellingovo 15,5599 F(3,41)=4,9454 p<,00506					
	Průměr muž	Průměr žena	Sm.odch. muž	Sm.odch. žena	T0j =(20746/58	kvantil =VF(0,95;3;
X1	5,086957	4,545455	2,574579	2,631807	0,161895	2,832747
X2	5,434783	3,818182	2,642762	2,519190	1,464812	2,832747
X3	5,304348	3,045455	2,770540	2,011332	3,232981	2,832747

Vidíme, že statistika T03 se realizuje v kritickém oboru $W = \langle 2{,}8327; \infty)$. S rizikem omylu nejvýše 5 % jsme tedy prokázali, že výrobky firmy C jsou odlišně hodnoceny muži a ženami.