MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2015 Klára Hordějčuková

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Spojité Markovské řetězce a jejich použití

Bakalářská práce

Klára Hordějčuková

Vedoucí práce: Mgr. Martin Panák, Ph.D. **Brno 2015**

Bibliografický záznam

Autor:	Klára Horděјčuková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Spojité Markovské řetězce a jejich použití
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	Mgr. Martin Panák, Ph.D.
Akademický rok:	2014/2015
Počet stran:	viii + ??
Klíčová slova:	Markovské řetězce; spojitý čas; Kolmogorovovy rovnice; pravděpodobnost přechodu; stacionární rozložení; bonus–malus systém; relativní sazba; efektivnost

Bibliographic Entry

Author: Klára Hordějčuková
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Continuous Markov chains and their applications

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Financial and Insurance Mathematics

Supervisor: Mgr. Martin Panák, Ph.D.

Academic Year: 2014/2015

Number of Pages: viii + ??

Keywords: Markov chains; continuous time; Kolmogorov's equations; transition probability; stationary distribution; bonus–malus system; relativity; efficiency

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme Markovským řetězcům se spojitým časem, které na závěr využijeme v oblasti pojišťovnictví. V teoretické části jsou popsány vlastnosti a chování tohoto řetězce, z nichž vyniká jedna markovská vlastnost tzv. „bezpaměťovost“. V praktické části je pomocí Markovského řetězce modelován systém bonus–malus, který se používá v pojištění automobilů a slouží k ohodnocení řidičů pomocí slev (bonusů) či přirážek (malusů) na pojistném na základě jejich nehodovosti. Výsledkem práce je určení optimální výše pojistného a posouzení efektivnosti zvoleného teoretického modelu.

Abstract

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2014/2015

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Klára Hordějčuková

Program: Matematika

Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Spojité Markovovské řetězce a jejich použití

Téma práce anglicky: Continuous Markov chains and their applications

Oficiální zadání:
Student vysvětlí pojem spojitého Markovovského řetězce. Popsanou teorii využije v modelech používaných v pojišťovnictví (bonus-malus).

Literatura:
Dickson, Hardy, Waters: Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks, Cambridge university press, Second edition 2013, ISBN 987-1-107-04407-4

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: Mgr. Martin Panák, Ph.D.

Datum zadání práce: 16. 9. 2014

V Brně dne: 31. 10. 2014

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Hordějčuková, 7.11.2014
Klára Hordějčuková
studentka

Mgr. Martin Panák, Ph.D.
vedoucí práce

v.z.
prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

V úvodu bych ráda poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Martinu Panákovi, Ph.D. za odborné rady, připomínky a za čas, který mi věnoval na konzultacích.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno xx. května 2015 ....

Klára Horděјčuková

Obsah

Úvod

V základním počtu teorie pravděpodobnosti se zkoumá pravděpodobnost jevů nezávisle na čase. Náhodný proces popisuje změnu těchto jevů v čase, obecně můžeme říci, že náhodný proces je množina náhodných veličin závislých na určitém počtu parametrů. My se zaměříme na procesy s jedním parametrem t, který představuje čas. Tyto náhodné procesy se nazývají stochastické procesy. A Markovovy řetězce jsou jejich nejjednodušším případem.

Typickou vlastností Markovova řetězce je jeho „bezpaměťovost“, to znamená, že budoucí hodnoty závisí jen na současných hodnotách tohoto řetězce, ne na minulých. Této vlastnosti je využito v celé řadě oborů, např. v ekonomii, biologii, fyzice, chemii. Jelikož jsem student oboru Finanční a pojistná matematika, rozhodla jsem se využít tento řetězce v modelu pojištění automobilů.

Cílem této práce je popsat základní vlastnosti a chování Markovského řetězce speciálně ve spojitém čase a poté najít uplatnění těchto řetězců. Základní pojmy teoretické části jsem zpracovala na základě materiálů [2], tyto poznatky jsem rozšířila o literaturu [8], [6] a [4]. Následuje praktická část, ve které ukážeme, jak se dá tento řetězec využít v pojištění automobilů. Zaměříme se na modelování systémů bonus–malus, tj. nastavování výše pojistného podle nehodovosti řidičů. Zde byl mým hlavním zdrojem [3].

V Kapitole 1 osvětlíme pojem stochastický proces, který nám pomůže při pochopení samotných Markovských řetězců. Druhá kapitola se už věnuje Markovským řetězcům se spojitým časem, definujeme si základní pojmy a charakteristické vlastnosti tohoto řetězce. V další kapitole zmíníme pár nejdůležitějších příkladů spojitého Markovského řetězce, zpracovaných převážně podle [7]. Teoretické výsledky z druhé kapitoly využijeme v Kapitole 4 k modelování systému bonus–malus, který je využíván nejvíce v pojištění automobilů. Tento speciální tarifní systém skládající se z určitého počtu tříd má za úkol rozdělit řidiče do jednotlivých bonusových tříd podle počtu nahlášených škod, a tím i spravedlivěji určit výši pojistného pro každého řidiče. Při způsobení nehody řidič klesá do horší třídy, kde získává malusy (přirážku) k pojistnému, naopak při jízdě bez nehod, řidič postupuje do lepší třídy, kde obdrží bonusy (slevu) na pojistném. Naším cílem a také závěrem je v Kapitole 5 stanovit optimální relativní sazby ke každé třídě a zhodnotit efektivnost zvoleného modelu.

Kapitola 1

Stochastický proces

Markovský řetězec je jeden ze základních příkladů stochastického procesu. Uveďme si proto nejdříve definici tohoto náhodného procesu.

Definice 1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a T neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$. Pak systém náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá stochastický proces.

Množina všech hodnot, které může X_t nabývat, se nazývá množina stavů a značí se J.

Věta 1. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je stochastický proces. Pak podle povahy množiny T rozlišujeme

- proces s diskrétním časem, je-li T spočetná množina, tj. $T = (t_0, t_1, \dots)$
- proces se spojitým časem, je-li T interval, zpravidla $T = \langle 0, \infty)$.

Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je stochastický proces. Dle stavu hodnoty X_t rozlišujeme

- proces s diskrétními stavy, je-li náhodná veličina X_t diskrétní
- proces se spojitými stavy, je-li náhodná veličina X_t spojitá.

Kapitola 2

Spojité Markovské řetězce

Předpokládáme-li, že se přechody mezi jednotlivými stavy mohou uskutečnit v libovolně blízkých časových okamžicích (lišící se o přírůstek h blížící se k nule), mluvíme o Markovském či Markovově řetězci se spojitým časem (též zkráceně markovský proces). Náhodné proměnné X_t nabývají hodnoty přiřazené určitým stavům. Uvažujeme zde tedy diskrétní stavový prostor a spojitý čas.

Definice 2. Systém celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jehož složky X_t nabývají hodnot z množiny stavů J, se nazývá markovský proces se spojitým časem, jestliže splňuje následující předpoklady:

1. $\forall j \in J \ \exists t \in T : P(X_t = j) > 0$
2. Pravděpodobnost výsledku v čase n závisí pouze na čase $n-1$ (budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném, nikoli na stavech minulých). Tento vztah je nazýván jako markovská vlastnost, kterou můžeme zapsat následovně

$$\forall t_0, t_1, \ldots, t_n \in T(t_0 < t_1 < \cdots < t_n) \text{ a pro } \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J :$$

$$P(X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = j_0) = P(X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1})$$

3. Pravděpodobnost nastání 2 a více přechodů v intervalu délky h se rovná $o(h)$. Symbol $o(h)$ představuje funkci $f(h)$, pro kterou platí

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Jak vidíme, tato pravděpodobnost je velmi malá, tudíž ji můžeme zanedbat.

Označme

- $X_t = j$ jev, že řetězec v okamžiku t je ve stavu j
- $P(X_t = j) = p_j(t)$ absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku t
- $\boldsymbol{p}(t) = (\dots, p_j(t), \dots)$ vektor absolutních pravděpodobností
- $P(X_0 = j) = p_j(0)$ počáteční pravděpodobnost stavu j
- $\boldsymbol{p}(0) = (\dots, p_j(0), \dots)$ vektor počátečních pravděpodobností
- $P(X_{t+h} = j | X_t = i) = p_{ij}(t, t+h)$ pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku t do stavu j v okamžiku $t+h$
- $\boldsymbol{P}(t, t+h) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(t, t+h) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ matice pravděpodobnosti přechodu mezi okamžiky t a t+h

2.1 Vlastnosti Markovského řetězce

Věta 2. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je markovský řetězec. Pak platí podmínky $\forall i, j \in J$ a $\forall t, h, g \in T$:

- $p_{ij}(t, t+h) \geq 0$,

  $\boldsymbol{P}(t, t+h) \geq \boldsymbol{0}$, kde $\boldsymbol{0}$ představuje nulovou matici

- $p_{ij}(t, t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$,

  $\boldsymbol{P}(t, t) = \boldsymbol{I}$, kde $\boldsymbol{I}$ přestavuje jednotkovou matici

- $\sum_{j \in J} p_{ij}(t, t+h) = 1$ (tj. stochastický vektor),

  $\boldsymbol{P}(t, t+h)\mathrm{e} = \mathrm{e}$, kde $\mathbf{e}$ představuje sloupcový vektor ze samých jedniček

- Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice:

  $p_{ij}(t, t+h+g) = \sum_{k \in J} p_{ik}(t, t+h) p_{kj}(t+h, t+h+g)$,

  $\boldsymbol{P}(t, t+h+g) = \boldsymbol{P}(t, t+h)\boldsymbol{P}(t+h, t+h+g)$

- Zákon evoluce:

  $p_j(t+h) = \sum_{k \in J} p_k(t) p_{kj}(t, t+h)$,

  $\boldsymbol{p}(t+h) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{P}(t, t+h)$

Důkaz. Nyní dokážeme výše zmíněnou Chapman-Kolmogorovovu rovnost

$$p_{ij}(t, t+h+g) = \sum_{k \in J} p_{ik}(t, t+h) p_{kj}(t+h, t+h+g) \tag{2.1}$$

Využijeme zde větu o úplné pravděpodobnosti $P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$ a markovskou vlastnost. Označme jevy $A = \{X_{t+h+g} = j\}$, $B_k = \{X_{t+h} = k\}$ a $C = \{X_t = i\}$. Pak můžeme psát:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t, t+h+g) &= P(X_{t+h+g} = j | X_t = i) = P(A|C) = \sum_k P(A|B_k C) P(B_k|C) \\ &= \sum_{k \in J} P(X_{t+h+g} = j | X_{t+h} = k, X_t = i) P(X_{t+h} = k | X_t = i) \\ &= \sum_{k \in J} P(X_{t+h+g} = j | X_{t+h} = k) P(X_{t+h} = k | X_t = i) \\ &= \sum_{k \in J} p_{ik}(t, t+h) p_{kj}(t+h, t+h+g). \end{aligned}$$

□

Definice 3. Markovský řetězec $\{X_t, t \in T\}$ je *homogenní*, jestliže platí:

$$\forall i, j \in J \, \forall t, h \in T : P(X_{t+h} = j | X_t = i) = p_{ij}(t, t+h) = p_{ij}(h) \tag{2.2}$$

Vztah (2.2) znamená, že tyto pravděpodobnosti $p_{ij}(h)$ nezávisí na tom, mezi kterými okamžiky k přechodu dochází. Závisí pouze na délce časového úseku h. Matice pravděpodobnosti přechodu $\boldsymbol{P}(t, t+h)$ se pak rovná $\boldsymbol{P}(h)$ a nazývá se matice přechodu za časový přírůstek h. Máme celý systém pravděpodobností $\{p_{ij}(h), h \geq 0\}$ takových, že $\sum_{j \in J} p_{ij}(h) = 1$, tudíž i celý systém matic $\{\boldsymbol{P}(h), h \geq 0\}$ obvykle definujeme $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$. Nadále budeme předpokládat, že daný Markovův řetězec je homogenní (dokud nebude uvedeno jinak) a budeme jej značit HMŘ.

Věta 3. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je HMŘ s vektorem počátečních pravděpodobností $\boldsymbol{p}(0)$ a systémem matic přechodu $\{\boldsymbol{P}(h), h \in T\}$. Pak pro $\forall h, g \in T$ platí:

$$\boldsymbol{P}(h+g) = \boldsymbol{P}(h)\boldsymbol{P}(g) \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{p}(h) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(h) \tag{2.4}$$

Důkaz. Pro každý prvek matice (2.3) platí:

$$\underbrace{p_{ij}(h+g)}_{i \to j} = \sum_{k \in J} \underbrace{p_{ik}(h)}_{i \to k} \underbrace{p_{kj}(g)}_{k \to j}.$$

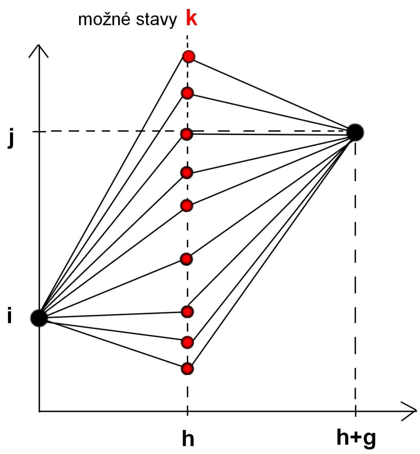
Nechť máme daný stav i, j a spočetně mnoho stavů k. Pravděpodobnost přechodu ze stavu i v čase 0 do stavu j v čase $h+g$ se dá chápat jako pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů, tj. součet pravděpodobností přechodu ze stavu i v čase 0 do stavu k v čase h a přechodu ze stavu k v čase h do stavu j v čase $h+g$. Zmíněné pravděpodobnosti přechodu jsou reprezentovány cestami z $i \to k$ a z $k \to j$.

Spojením těchto cest získáme cestu z $i \to j$. Tento proces můžeme názorněji vidět na obrázku 2.1.

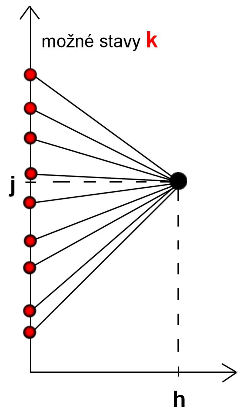
Druhý výraz dokážeme obdobně; pro každý prvek matice (2.4) platí:

$$p_j(h) = \sum_{k \in J} p_k(0) p_{kj}(h).$$

Princip je stejný, jenom zde nemáme počáteční stav i. Zde může nastat jakýkoli. Sečteme-li všechny pravděpodobnosti, představující cesty z těchto stavů k, získáme pak cestu z $k \to j$, kterou můžeme vidět na obrázku 2.2. $\square$



Obrázek 2.1



Obrázek 2.2

Poznámka. Upřesníme zde pojem pravděpodobnosti setrvání ve stavu i. Mohou nastat dvě na první pohled identické situace:

- $p_{ii}(h) = P(X_s = i, \forall s \in \langle 0; h \rangle | X_0 = i)$

  označuje pravděpodobnost, že proces byl ve stavu i v čase 0 a tento stav i neopustí do času h,

- $p_{\widetilde{ii}}(h) = P(X_h = i | X_0 = i)$

  označuje pravděpodobnost, že proces byl v čase 0 ve stavu i a také v čase h je ve stavu i. Také zahrnuje i to, že proces opustí stav i v časovém intervalu délky h za předpokladu, že se zpět vrátí do stavu i v čase h.

Pak můžeme zapsat vztah mezi těmito dvěma pravděpodobnostmi následovně

$$p_{\widetilde{ii}}(h) = p_{ii}(h) + o(h).$$

2.2 Matice intenzit přechodu

U spojitého markovského řetězce je dán celý systém matic přechodu $\{\boldsymbol{P}(h), h \in T\}$, protože řetězec za čas t může projít několika změnami. Zápis těchto matic by byl příliš složitý, proto zavedeme matici intenzit přechodu, která bude tvořena intenzitami pro nekonečně krátký interval h.

Mějme HMŘ se spojitým časem. Řekneme, že v okamžiku t je řetězec ve stavu i a za časový přírůstek h přejde do stavu j s pravděpodobností $p_{ij}(h)$. Pak číslo

$$\frac{p_{ij}(h)}{h}$$

vyjadřuje *průměrnou rychlost změny pravděpodobnosti přechodu* ze stavu i do stavu j za přírůstek h. Dále víme, že pravděpodobnost $p_{ii}(h)$ se limitně blíží jedné, proto definujeme její doplněk $1-p_{ii}(h)$ jako pravděpodobnost, že za časový přírůstek h přejde řetězec do nějakého jiného stavu. Pak hodnota výrazu

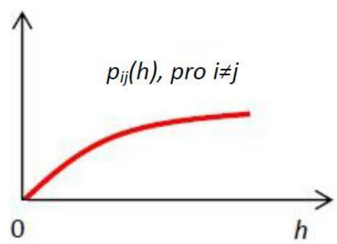
$$\frac{1-p_{ii}(h)}{h}$$

vyjadřuje *průměrnou rychlost změny pravděpodobnosti výstupu* ze stavu i za časový přírůstek h.
Pro $h \to 0_+$ nazveme tyto rychlosti změn intenzitami.

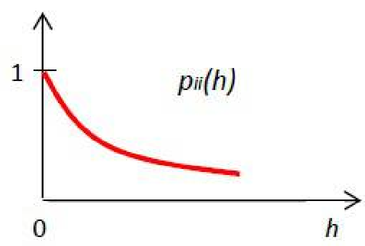
Dále předpokládejme, že $\forall i, j \in J$ existuje

$$\lim_{h \to 0_+} p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}, \tag{2.5}$$

kterou znázorňuje 2.3 a 2.4.



Obrázek 2.3



Obrázek 2.4

Definice 4. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem a systémem matic přechodu $\{\boldsymbol{P}(h), h \in T\}$. Potom definujeme (pokud následující limity existují) $\forall i, j \in J$:

- *intenzitu přechodu* ze stavu i do stavu j jako:

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, \tag{2.6}$$

ze které si můžeme vyjádřit pst. přechodu

$$p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h) \tag{2.7}$$

- a *intenzitu výstupu* ze stavu i jako:

$$q_i = \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}, \tag{2.8}$$

ze které si můžeme vyjádřit pst. setrvání

$$p_{ii}(h) = 1 - hq_i + o(h) = 1 + hq_{ii} + o(h) \tag{2.9}$$

Nyní jsme si definovali intenzity změn k tomu, abychom mohli sestrojit matici intenzit přechodu.

Definice 5. Mějme matici $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$ takovou, pro kterou platí:

(i) diagonální prvky $q_{ii} = -q_i$

(ii) $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} < 0$

(iii) součet prvků v každém řádku je nulový, tj. $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0$,

pak $\boldsymbol{Q}$ se nazývá *matice intenzit přechodu* a zapisujeme

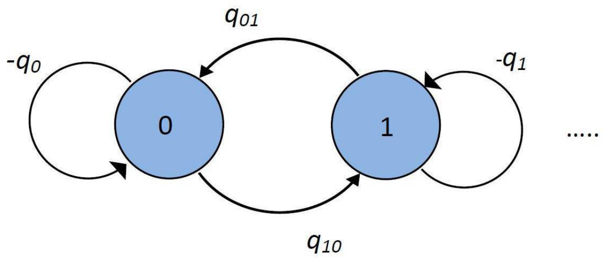
$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz (iii) za pomocí intenzit přechodu (2.6) a (2.8) a tvrzení (i):

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} q_{ij} &= \sum_{i \neq j} q_{ij} + q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ij} - q_i = \sum_{i \neq j} \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} - \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0_+} \frac{\sum_{i \neq j} p_{ij}(h) - 1 + p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\sum_{j \in J} p_{ij}(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

□

Matici intenzit lze také vyjádřit pomocí přechodového diagramu 2.5. Jde o orientovaný graf, kde vrcholy představují stavy a ohodnocení hran mezi intenzitám přechodu.



Obrázek 2.5: Přechodový diagram matice intenzit přechodu

2.2.1 Význam intenzit přechodu

Všechny pravděpodobnosti přechodu mohou být vyjádřeny pomocí intenzit přechodu, které je často možné odhadnout v konkrétních modelech. Nejdříve si ukážeme výraz p_{ii} vyjádřený intenzitami přechodu pro homogenní markovský řetězec a poté i pro nehomogenní.

Věta 4. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem a s konečnou množinou stavů J. Pak platí $\forall h > 0$

$$p_{ii}(t) = \mathrm{e}^{-q_i t}. \tag{2.10}$$

Důkaz. Zde využijeme součin pravděpodobností $p_{ii}(t+h) = p_{ii}(t)p_{ii}(h)$, do kterého dosadíme tvrzení (2.7) a dále upravujeme

$$\begin{aligned} p_{ii}(t+h) &= p_{ii}(t)\Big(1 - hq_i + o(h)\Big) \\ p_{ii}(t+h) &= p_{ii}(t) - hq_i p_{ii}(t) + o(h) \\ \frac{p_{ii}(t+h) - p_{ii}(t)}{h} &= -p_{ii}(t)q_i + \frac{o(h)}{h} \end{aligned}$$

Pro $h \to 0_+$ získáme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_{ii}(t) &= -p_{ii}(t)q_i \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln|p_{ii}(t)| &= -q_i \end{aligned}$$

a jelikož platí $p_{ii}(t) > 0$, můžeme odstranit absolutní hodnotu a integrujeme přes $(0, t)$

$$\ln\Big(p_{ii}(t)\Big) = -\int_0^t q_i \,\mathrm{d}s = -tq_i,$$

nakonec odlogaritmujeme a dostaneme

$$p_{ii}(t) = \mathrm{e}^{-q_i t}.$$

□

Věta 5. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je nehomogenní MŘ se spojitým časem a s konečnou množinou stavů J. Pak platí pro $\forall h > 0$

$$p_{ii}(t, t+h) = \mathrm{e}^{\left(-\int_0^t \sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij}(t+s)\,\mathrm{d}s\right)}. \tag{2.11}$$

Důkaz. Zde vyjdeme z těchto dvou tvrzení

$$p_{ii}(t, t+h+g) = p_{ii}(t, t+h)p_{ii}(t+h, t+h+g)$$

a

$$p_{ii}(t+h, t+h+g) = 1 - h \sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij}(t+h) + o(h)$$

a upravujeme analogicky jako u homogenního MŘ. □

2.3 Kolmogorovovy diferenciální rovnice

V předcházející kapitole jsme definovali matici intenzit přechodu $\boldsymbol{Q}$, kterou nyní využijeme v systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic. Cílem této kapitoly je určit pravděpodobnosti přechodu, které získáme jako řešení zmíněného systému. Nejprve si však ukážeme, jak se řeší absolutní pravděpodobnosti. V obou těchto případech se jedná o systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, které se nejčastěji řeší pomocí Laplaceovy transformace.

2.3.1 Homogenní Kolmogorovovy rovnice

Věta 6. Mějme homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, který má systém vektorů absolutních pravděpodobností $\{\boldsymbol{p}(t), t \in T\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\boldsymbol{p}(0)$ a matici intenzit přechodu $\boldsymbol{Q}$. Pak $p_i(t)$ lze vyjádřit jako řešení systému evolučních diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q} \tag{2.12}$$

s počáteční podmínkou $\boldsymbol{p}(0)$.

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{I}$ přestavuje jednotkovou matici. Pomocí rovnice Zákona evoluce $\boldsymbol{p}(t+h) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{P}(t, t+h)$ upravujeme:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'(t) &= \lim_{h\to 0_+} \frac{\boldsymbol{p}(t+h) - \boldsymbol{p}(t)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{P}(t, t+h) - \boldsymbol{p}(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0_+} \frac{\boldsymbol{p}(t)\Big(\boldsymbol{P}(t, t+h) - \boldsymbol{I}\Big)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q}h}{h} = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q}\end{aligned}$$

□

Věta 7. Nechť $\boldsymbol{Q}$ je matice řádu n. Potom existuje jediné řešení systému evolučních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou $\boldsymbol{p}(0)$, které lze vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}.$$

Později si ukážeme, co představuje tato exponenciální funkce.

Důkaz. Tvrzení (2.12) upravíme na tvar

$$\frac{\boldsymbol{p}'(t)}{\boldsymbol{p}(t)} = \boldsymbol{Q}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{Q}$$

a řešíme rovnici

$$\ln \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{Q}t + c$$

$$\boldsymbol{p}(t) = k\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t},$$

kde za k si můžeme zvolit vektor $\boldsymbol{p}(0)$, tudíž dostáváme $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}$. □

Věta 8. Pro Markovův řetězec se spojitým časem a konečnou množinou stavů J lze $p_{ij}(t)$ vyjádřit jako řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a to jedním ze dvou následujících způsobů:

- soustavou *retrospektivních* rovnic s počáteční podmínkou $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} \tag{2.13}$$

- soustavou *prospektivních* rovnic s počáteční podmínkou $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t) \tag{2.14}$$

Soustava retrospektivních rovnic (2.13) vychází z derivace $p'_{ij}(t)$, která je vyjádřena pomocí všech pravděpodobností přechodu do stavu j:

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(h)q_j + \sum_{k\in J, k\neq i} p_{ik}(h)q_{kj} = \sum_{k\in J} p_{ik}(h)q_{kj}$$

Soustava prospektivních rovnic (2.14) vychází z derivace $p'_{ij}(t)$, která je vyjádřena pomocí všech pravděpodobností přechodu ze stavu i:

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(h) + \sum_{k\in J, k\neq i} q_{ik}p_{kj}(h) = \sum_{k\in J} q_{ik}p_{kj}(h)$$

Důkaz. uveden v [9, strana 83] □

Věta 9. Nechť $\boldsymbol{Q}$ je kvazistochastická matice řádu n. Pak existuje jediné (a pro obě stejné) řešení systému rovnic (2.13) a (2.14), které vyhovuje počáteční podmínce $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$. Maticově lze toto řešení psát ve tvaru

$$\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t},$$

kde exponenciální funkce matice $\boldsymbol{Q}$ je dána jako mocninný rozvoj

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{Q}^k t^k}{k!} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{Q}}{1!}t + \frac{\boldsymbol{Q}^2}{2!}t^2 + \cdots$$

Důkaz. Soustava (2.13) má obecné řešení $\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0)\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}$ a soustava (2.14) má obecné řešení $\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}\boldsymbol{P}(0)$. Při počáteční podmínce $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$ mají obě soustavy řešení

$$\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}$$

□

2.3.2 Nehomogenní Kolmogorovovy rovnice

Věta 10. Pro nehomogenní Markovův proces s konečnou množinou stavů J lze pravděpodobnosti $p_{ij}(t, t+h)$ vyjádřit pomocí systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic, a to jedním ze dvou způsobů. My si zde ukážeme jeden pomocí *prospektivních* rovnic

$$\boldsymbol{P}'(t, t+h) = \boldsymbol{P}(t, t+h)\boldsymbol{Q}(t+h), \tag{2.15}$$

tudíž pro každý prvek matice platí

$$p'_{ij}(t, t+h) = \sum_{k\in J, k\neq j} \Big(p_{ij}(t, t+h)q_{jk}(t+h) - p_{ik}(t, t+h)q_{kj}(t+h)\Big).$$

Důkaz. K odvození těchto rovnic postupujeme obdobně jako u tvrzení (2.11). Navíc použijeme zápisy (2.1) a (2.9) a můžeme psát

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t, t+h+g) &= \sum_{k\in J} p_{ik}(t, t+h)p_{kj}(t+h, t+h+g) \\
&= p_{ij}(t, t+h)p_{jj}(t+h, t+h+g) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t, t+h)p_{kj}(t+h, t+h+g) \\
&= p_{ij}(t, t+h)\Big(1 - h\sum_{k\neq j} q_{ij}(t+h) + o(h)\Big) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t, t+h)\Big(hq_{kj}(t+h) + o(h)\Big) \\
&= p_{ij}(t, t+h) - h\sum_{k\neq j}\Big(p_{ij}(t, t+h)q_{jk}(t+h) - p_{ik}(t, t+h)q_{kj}(t+h)\Big) + o(h).
\end{aligned}$$

Nakonec vydělíme h a pro $h \to 0_+$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{ij}(t, t+h) = \sum_{k\in J, k\neq j}\Big(p_{ij}(t, t+h)q_{jk}(t+h) - p_{ik}(t, t+h)q_{kj}(t+h)\Big).$$

□

2.4 Stacionární a limitní rozložení

Definice 6. Mějme HMŘ se spojitým časem a systémem matic přechodu $\{\boldsymbol{P}(t), t \in T\}$. Pokud pro stochastický vektor $\boldsymbol{\pi}$ a $\forall t \in T$ platí $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)$, pak $\boldsymbol{\pi}$ se nazývá stacionární vektor daného řetězce.

Řešení této rovnice může být kvůli systému matic přechodu $\{\boldsymbol{P}(t), t \in T\}$ obtížné, proto využijeme k výpočtu matici intenzit přechodu $\boldsymbol{Q}$, jak si ukážeme za chvíli.

Věta 11. Existuje-li limita

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\pi} \tag{2.16}$$

a toto *limitní rozdělení* nezávisí na $\boldsymbol{p}(0)$, pak Markovův proces nazveme regulární a pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi}$ nazveme *stacionárním rozložením*.

Věta 12. Nechť HMŘ se spojitým časem má systém matic přechodu $\{\boldsymbol{P}(t), t \in T\}$, kde $\boldsymbol{P}(t)$ je regulární a matici intenzit přechodu $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$, pak stacionární vektor vypočítáme ze soustavy homogenních diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{\pi Q} = \boldsymbol{0}, \tag{2.17}$$

kde

$$\sum_{j \in J} \pi_j = 1 \quad \text{s podmínkou} \quad \pi_j > 0$$

Důkaz. Protože stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi}$ nezávisí na čase t, snadno odvodíme (2.17) dosazením $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\pi}$

$$0 = \boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\pi Q}.$$

□

Kapitola 3

Speciální markovské procesy

3.1 Poissonův proces

Poissonův proces je jeden z nejjednodušších a zároveň nejvýznamnějších příkladů spojitého Markovského řetězce. Jedná se o proces, který popisuje výskyt událostí (stejného druhu) v čase. Tyto události nastávají náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. „Jednoduchý“ je v tom, že má velmi omezené přechody mezi stavy. Buď může setrvat v dosavadním stavu nebo přejít do nejbližšího vyššího stavu.

Definice 7. Nechť X_t je počet výskytů určitého jevu v čase $(0, t\rangle$. Střední hodnota počtu těchto jevů za časovou jednotku je konstantní a značí se $\lambda > 0$. Potom tento homogenní markovský řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s hodnotami $J = \{0, 1, 2...\}$ nazýváme *Poissonův proces* s intenzitou λ.

Poissonův proces dále splňuje následující vlastnosti:

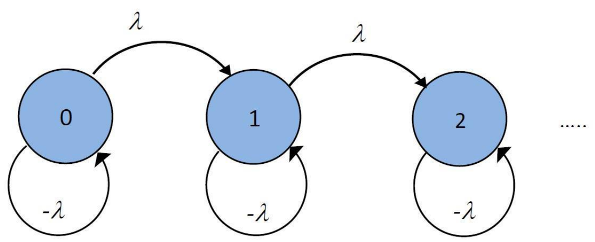
- Pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu $j+1$ v intervalu $(t, t+h\rangle$ se rovná
$$p_{j,j+1}(t, t+h) = \lambda h + o(h)$$
a to též vyjadřuje, že nastala událost.

- Pro pravděpodobnost setrvání ve stejném stavu v čase $(t, t+h\rangle$ platí
$$p_{j,j}(t, t+h) = 1 - \lambda h + o(h)$$
a to též vyjadřuje, že událost nenastala.

- Pravděpodobnost nastání více než jedné události v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ je zanedbatelná, tedy rovna $o(h)$.

Odtud za pomoci rovnic (1.6) a (1.7) získáme intenzity přechodu $q_{j,j+1} = \lambda$, $q_{j,j} = -\lambda$, $q_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $i \neq j+1$ a můžeme sestavit matici intenzit přechodu

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & 0 \\ & -\lambda & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -\lambda \end{pmatrix}.$$



Obrázek 3.1: Přechodový diagram Poissonova procesu

Intenzity přechodu mezi stavy znázorňuje přechodový diagram 3.1.

Označme $p_0(t)$ pravděpodobnost, že v čase $(0,t\rangle$ nenastala žádná událost a $p_j(t)$ pravděpodobnosti, že v čase $(0,t\rangle$ nastalo právě j událostí. Na základě výše uvedených vlastností a počáteční podmínky $p_0(0)=1$ a $p_j(0)=0$ platí

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= \big(1-\lambda h+o(h)\big)p_0(t)\\ p_j(t+h) &= \big(1-\lambda h+o(h)\big)p_j(t)+\big(\lambda h+o(h)\big)p_{j-1}(t)+o(h). \end{aligned}$$

Postupně upravujeme

$$\begin{aligned} p_0(t+h)-p_0(t) &= -\lambda h p_0(t)+p_0(t)o(h)\\ p_j(t+h)-p_j(t) &= -\lambda h p_j(t)+p_j(t)o(h)+\lambda h p_{j-1}(t)+p_{j-1}(t)o(h)\\ \frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} &= -\lambda p_0(t)+\frac{p_0(t)o(h)}{h}\\ \frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h} &= -\lambda p_j(t)+\frac{p_j(t)o(h)}{h}+\lambda p_{j-1}(t)+\frac{p_{j-1}(t)o(h)}{h} \end{aligned}$$

a při $h\to 0_+$ získáme soustavu

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t)\\ p_j'(t) &= -\lambda p_j(t)+\lambda p_{j-1}(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tato soustava (3.1) představuje systém diferenciálních rovnic pro absolutní pravděpodobnosti definovaný v (2.9). Aplikováním Laplaceovy transformace získáme výsledné rovnice

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\\ p_j(t) &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Z druhé rovnice vidíme, že jsme vlastně provedli důkaz $X_t\sim P(\lambda t)$. Střední hodnota počtu událostí, které nastanou v intervalu $(0,t\rangle$, je rovna parametru λt.

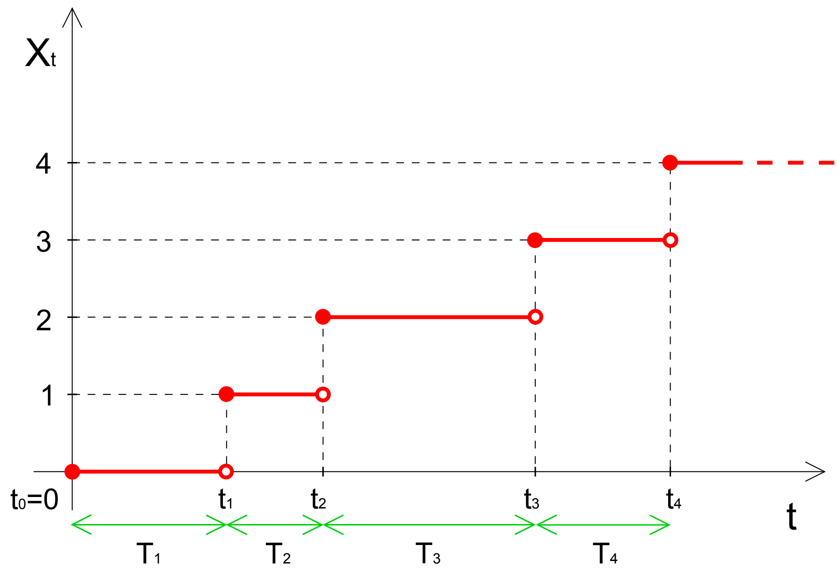
Nyní se pokusíme modelovat Poissonův proces pomocí posloupnosti náhodných nezávislých veličin $T_1,T_2,\dots$ 3.2, kde T_j označuje dobu čekání na příchod události. Pak platí

$$P(T_j>t)=p_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

odtud

$$P(T_j\le t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Dostáváme distribuční funkci, která se řídí exponenciálním rozložením, tedy $T_j \sim Ex(\lambda)$. Je–li rozložení počtu změn Poissonovo, pak pro stejný proces je rozložení dob mezi změnami exponenciální (odpovídá Lemma 2).



Obrázek 3.2: realizace Poissonova procesu

3.2 Procesy vzniku a zániku

Mezi další významné markovské procesy patří procesy vzniku a zániku. Jedná se o model populace v čase, ve kterém náhodně jedinci vznikají a jiní zase zanikají. Vycházíme z předpokladů, že narození a úmrtí jsou nezávislé jevy.

Definice 8. Nechť X_t je počet jedinců, kteří se nacházejí v populaci v čase $(0, t\rangle$. Máme danou intenzitu vzniku $\lambda_j > 0$ a intenzitu zániku $\mu_j > 0$. Pak tento homogenní markovský řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s hodnotami $J = \{0, 1, 2...\}$ nazýváme *proces vzniku a zániku* s intenzitami λ_j a μ_j.

Dále platí pro tento proces následující vlastnosti:

- Pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h\rangle$ v j-členné populaci dojde k jednomu narození je
$$p_{j,j+1}(t, t+h) = \lambda_j h + o(h)$$
- Pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h\rangle$ v j-členné populaci dojde k jednomu úmrtí je
$$p_{j,j-1}(t, t+h) = \mu_j h + o(h)$$
- Pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h\rangle$ v j-členné populaci nedojde k žádnému narození ani úmrtí je
$$p_{j,j}(t, t+h) = 1 - \lambda_j h - \mu_j h + o(h)$$

- Pravděpodobnost narození a úmrtí více jedinců populace v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ je zanedbatelná, tedy rovna $o(h)$.

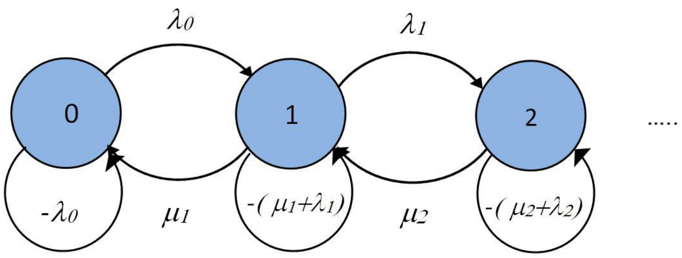
Stejně jako u Poissonova procesu můžeme pomocí rovnic (1.6) a (1.7) odvodit intenzity přechodu

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= \lambda_j, && j = 0, 1, \dots \\ q_{j,j-1} &= \mu_j, && j = 1, 2, \dots \\ q_{j,j} &= -\lambda_j - \mu_j, && j = 1, 2, \dots \\ q_{j,k} &= 0, && j \neq k \\ q_0 &= \lambda_0. \end{aligned}$$

Matice intenzit přechodu je pak definovaná takto

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Intenzity přechodu mezi stavy znázorňuje přechodový diagram 3.3.



Obrázek 3.3: Přechodový diagram obecného procesu vzniku a zániku

Nyní zde zmíníme několik speciálních případů:

- *Lineární proces vzniku (Yuleův proces)*, kde intenzity vzniku jsou úměrné velikosti populace, tj. $\lambda_j = j\lambda$ pro $j = 0, 1, 2, \dots$

- *Lineární proces zániku*, kde intenzity zániku jsou úměrné velikosti populace, tj. $\mu_j = j\mu$ pro $j = 1, 2, \dots$

- *Lineární procesu vzniku a zániku*, kde intenzity přechodu jsou lineárními funkcemi stavů, ve kterých byl systém v předešlém okamžiku, tj. $\lambda_j = j\lambda$ pro $j = 0, 1, 2, \dots$ a $\mu_j = j\mu$ pro $j = 1, 2, \dots$

- *Obecný proces vzniku*, kde počet jedinců populace v čase jen roste, tj. $\lambda_j > 0$ pro $j = 0, 1, 2, \dots$

- *Obecný proces zániku*, kde počet jedinců populace v čase jen klesá, tj. $\mu_j > 0$ pro $j = 1, 2, \dots$

Kapitola 4

Využití MŘ v systému bonus-malus

V pojišťovnictví, především u pojištění automobilů se používá speciální tarifní systém, který má za úkol snížit heterogenitu pojistného kmene. Jedná se o systém bonus-malus, kde kromě motivování pojistníků řídit opatrně, je cílem stanovení pojistného, jehož výše odpovídá individuálním rizikům.

Systém bonus-malus je tvořen určitým počtem (bonusových) tříd, kde každá třída má stanovenou relativní výši pojistného. Každé pojistné období (obvykle rok), je pojištěnec zařazen do jedné bonusové třídy na základě počtu uplatněných nároků. V případě bezeškodního průběhu postupuje pojištěný do nižší třídy, kde získává bonusy, nebo-li slevu na pojistném. Naopak při způsobení škody se pojištěný dostává do vyšší třídy, kde platí vyšší pojistné, což odpovídá trestu v podobě malusu (pokuty).

Určení bonusové třídy v následujícím obdobím závisí na aktuální bonusové třídě pojištěnce a počtu škod v aktuálním pojistném období. Jinými slovy, budoucí stav (třída v roce $t+1$) závisí jen na přítomnosti (třídě a počtem škod v roce t), ne na minulosti. Tento vztah jasně ukazuje markovskou vlastnost. Proto budeme modelovat tento systém pomocí Markovského řetězce $\{L_k, k \in \mathbb{N}_0\}$, jehož stavy reprezentují bonusové třídy.

4.1 Základní a relativní pojistné

Každá pojišťovna se snaží udržet si finanční rovnováhu. Požaduje, aby zavedení tohoto systému nemělo vliv na roční výběr pojistného. Systém bonus-malus je v dlouhodobém horizontu finančně stabilní díky optimálním relativním sazbám. Zde vyvstává otázka, jakou stanovit relativní sazbu připadající k jednotlivým třídám. Touto problematikou se budeme zabývat později.

Uvažujme pojištění automobilů. Označme si relativní sazbu v bonusové třídě l jako r_l, což představuje situaci, že pojištěný nacházející se ve třídě l, musí platit pojistné rovné součinu základního pojistného a relativní sazby r_l. Noví řidiči, když vstoupí do systému, jsou přiřazeni do třídy l_0, kde platí základní stoprocentní pojistné (neboť relativní pojistné je 1). Avšak to neplatí pro „zkušené“ řidiče, kteří mají zaznamenanou historii pojistných nároků, či přímo úroveň bonusové třídy od předchozích pojistitelů. Pro stanovení základní výše pojistného je užito ratingových faktorů, které zahrnují cenu, váhu, typ automobilu,..., ale hlavním úkolem pojistného matematika je najít optimální relativní výši pojistného.

4.2 Modelování bonus-malus systému

Trajektorii pojištěnce v systému modelujeme pomocí posloupnosti $\{L_0, L_1, \dots\}$ náhodných proměnných s hodnotami z množiny stavů $S = \{0, 1, \dots, s\}$, kde stav 0 určuje nejlepší třídu (s nejvyšším bonusem) a stav s nejhorší třídu (s nejvyšším malusem). Hodnota L_k označuje třídu, ve které je klient během období $(k, k+1)$.

Dále mějme posloupnost náhodných veličin $\{N_1, N_2, \dots, \}$, kde N_k vyjadřuje počet pojistných nároků během období $(k-1, k)$. Hodnota L_k závisí na hodnotách N_k a L_{k-1}. Také ale závisí na stanovených přechodových pravidlech, které si ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad 1. Stanovíme si pravidla přechodu označovaná $(-1/+2)$ a ukážeme, jak se při jejich zavedení systém chová.
Mějme 5 úrovní, od 0 do 4. Výchozí úrovní je stupeň 4 (třída s nejvyšším pojistným). Při bezeškodním roku získáváme slevu v podobě poklesu o 1 stupeň ($L_k = L_{k-1} - 1$). V případě, že v průběhu roku byly nahlášeny škody, postoupíme o 2 stupně výš vynásobené počtem škod ($L_k = L_{k-1} + 2N_k$). Na závěr musíme vzít v úvahu to, že můžeme přejít nejlépe do stavu 0 a nejhůře do stavu 4. Tyto pravidla můžeme vidět v tabulce 4.1.

L_{k-1}	stupeň L_k, když		
	$N_k = 0$	$N_k = 1$	$N_k \geq 2$
0	0	2	4
1	0	3	4
2	1	4	4
3	2	4	4
4	3	4	4

Tabulka 4.1: Přechodová pravidla pro úroveň $(-1/+2)$

Úroveň L_k můžeme také vyjádřit pomocí následující rekurzivní rovnice

$$L_k = \begin{cases} \max\{L_{k-1} - 1, 0\} & \text{pro } N_k = 0 \\ \min\{L_{k-1} + 2N_k, 4\} & \text{pro } N_k \geq 1 \end{cases}, \tag{4.1}$$

a celkově platí

$$L_k = \max\{\min\{L_{k-1} + (2N_k - 1 + I_k), 4\}, 0\},$$

kde

$$I_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } N_k = 0 \\ 1 & \text{pro } N_k \geq 1. \end{cases}$$

Poznámka. Všechny příklady v této práci budeme řešit na základě pravidel označovaných jako $(-1/+2)$.

Formálněji můžeme zavést tato pravidla (přechod z jedné třídy do jiné) pomocí matice $\boldsymbol{T}(k)$ velikosti $s \times s$, když známe počet (k) nahlášených škod během roku. Pro každý prvek matice $\boldsymbol{T}(k)$ a pro každé $i, j \in S$ platí

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} 1 & \text{když přejdeme z třídy } i \text{ do třídy } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

4.3 Pravděpodobnosti přechodu mezi třídami

Předpokládejme, že počty pojistných událostí $N_1, N_2, \ldots$ jsou nezávislé a řídí se Poissonovým rozložením s parametrem λ, který představuje roční očekávanou frekvenci škod. Pak i rozdělení veličin $L_1, L_2, \ldots$ závisí na parametru λ, který představuje individuální riziko klienta.

Nechť $p_{ij}(\lambda)$ je pravděpodobnost přechodu mezi bonusovými třídy i a j s parametrem λ. Pak pro každé $i, j \in S$ platí

$$\begin{aligned} p_{ij}(\lambda) &= P(L_{k+1}(\lambda) = j | L_k(\lambda) = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(L_{k+1}(\lambda) = j | L_k(\lambda) = i, N_{k+1} = n) P(N_{k+1} = n | L_k(\lambda) = i). \end{aligned}$$

Nyní využijeme faktu, že N_{k+1} a $L_k(\lambda)$ jsou nezávislé, neboť víme, že $L_k(\lambda)$ závisí jen na N_k a $N_k \sim Po(\lambda)$, takže

$$P(N_{k+1} = n | L_k(\lambda) = i) = P(N_{k+1} = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} \tag{4.2}$$

a dosazením do předešlé rovnice získáme

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} t_{ij}(n). \tag{4.3}$$

Všechny vyjádřené pravděpodobnosti z (4.3) uspořádáme do matice $\boldsymbol{P}(\lambda)$ velikosti $s \times s$, která je stochastickou maticí s kladnými pravděpodobnostmi p_{ij} pro každé $i, j \in S$. Platí tedy

$$\boldsymbol{P}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \boldsymbol{T}(k).$$

Tato matice obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy během jednoho pojistného roku. V další kapitole si ukážeme, jak vypadá matice $\boldsymbol{P}$ za více pojistných let.

Příklad 2. ($-1/+2$ *úrovně*)
Pro náš modelovaný bonus-malus systém z *Příkladu 1.* vyjádříme matici pravděpodobnosti přechodu $\boldsymbol{P}(\lambda)$ podle rovnice (4.3) následovně:

$$\boldsymbol{P}(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

4.4 Bonus-malus v dlouhém období

Pro pojišťovnu je zásadní to, jak se chová systém v dlouhém období. Proto začneme zkoumat co se stane po n krocích a posléze pro $n \to \infty$.

Pro každé $k, n \in \mathbb{N}$ uvažme pravděpodobnosti přechodu mezi lety k a $n+k$ mezi třídami $i, j \in S$

$$p_{ij}^{(n)}(\lambda) = P(L_{k+n}(\lambda) = j | L_k(\lambda) = i)$$

Tyto pravděpodobnosti lze zapsat do matice $\boldsymbol{P}^{(n)}(\lambda)$, která je též stochastickou maticí a má následující vlastnosti:

(i) $\boldsymbol{P}^{(n)}(\lambda) = \boldsymbol{P}^n(\lambda)$,

(ii) $\boldsymbol{P}^{(n+m)}(\lambda) = \boldsymbol{P}^{(n)}(\lambda)\boldsymbol{P}^{(m)}(\lambda)$.

Důkaz. Uveden v [3, strana 174]. □

Očekáváme, že se v dlouhodobém horizontu systém stabilizuje. To znamená, že se rozdělení pojištěných do jednotlivých tříd ustálí. Tento rovnovážný stav, kolem kterého pojistník bude oscilovat, závisí na roční očekávané frekvenci nehodovosti λ. Nyní si stabilizovaný systém definujeme pomocí stacionárního rozložení následovně:

Definice 9. Nechť $\{L_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ je HMŘ s množinou stavů S a maticí pravděpodobnosti přechodu $\boldsymbol{P}(\lambda)$. Dále mějme vektor $\boldsymbol{\pi}(\lambda) = (\pi_j(\lambda), j \in S)$ s rizikovým parametrem λ, který se nazývá stacionární, jestliže platí:

- $\pi_j(\lambda) > 0$,
- $\pi_j(\lambda)$ je stochastický vektor, tj.

$$\sum_{j \in S} \pi_j(\lambda) = 1, \tag{4.4}$$

- $\pi_j(\lambda) = \sum_{i \in S} \pi_i(\lambda) p_{ij}(\lambda)$, tj.

$$\boldsymbol{\pi}(\lambda) = \boldsymbol{\pi}(\lambda)\boldsymbol{P}(\lambda). \tag{4.5}$$

Pak stacionární rozdělení existuje právě jedno a platí

$$\pi_j(\lambda) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}(\lambda). \tag{4.6}$$

Pravděpodobnost $\pi_j(\lambda)$ vyjadřuje, že pojištěný je ve třídě j po ustálení systému. Stacionární rozdělení nezávisí na počátečním rozdělení tříd, to znamená, že matice $\boldsymbol{P}^{(n)}(\lambda)$ vytvořená z matice $\boldsymbol{P}(\lambda)$ konverguje k matici $\boldsymbol{\Pi}(\lambda)$, která má všechny řádky shodné a rovné $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$. Můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{\Pi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}(\lambda) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}(\lambda) \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)}(\lambda),$$

$$\boldsymbol{\pi}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n,\lambda).$$

Příklad 3. ($-1/+2$ *úrovně*)
Nejdříve si vyjádříme matici pravděpodobnosti přechodu $\boldsymbol{P}(\lambda)$ za jeden rok pro škodní frekvenci $\lambda = 0,15198$

$$\boldsymbol{P}(0,15198) = \begin{pmatrix} 0,859 & 0 & 0,13055 & 0 & 0,01044 \\ 0,859 & 0 & 0 & 0,13055 & 0,01044 \\ 0 & 0,859 & 0 & 0 & 0,14099 \\ 0 & 0 & 0,859 & 0 & 0,14099 \\ 0 & 0 & 0 & 0,859 & 0,14099 \end{pmatrix}.$$

Matici po dvou letech $\boldsymbol{P}^{(2)}(\lambda)$ získáme pomocí vlastnosti (i)

$$\boldsymbol{P}^2(0,15198) = \begin{pmatrix} 0,7379 & 0,1121 & 0,1121 & 0,0090 & 0,0288 \\ 0,7379 & 0 & 0,2243 & 0,0090 & 0,0288 \\ 0,7379 & 0 & 0 & 0,2333 & 0,0288 \\ 0 & 0,7379 & 0 & 0,1211 & 0,1410 \\ 0 & 0 & 0,7379 & 0,1211 & 0,1410 \end{pmatrix}.$$

Postupným umocňováním matice $\boldsymbol{P}(\lambda)$ dojdeme k závěru, že po 24 letech (při zaokrouhlení na čtyři desetinná místa) se systém ustálí, neboť všechny řádky matice jsou stejné, tj.

$$\boldsymbol{P}^{24}(0,15198) = \begin{pmatrix} 0,6744 & 0,1107 & 0,1289 & 0,0475 & 0,0385 \\ 0,6744 & 0,1107 & 0,1289 & 0,0475 & 0,0385 \\ 0,6744 & 0,1107 & 0,1289 & 0,0475 & 0,0385 \\ 0,6744 & 0,1107 & 0,1289 & 0,0475 & 0,0385 \\ 0,6744 & 0,1107 & 0,1289 & 0,0475 & 0,0385 \end{pmatrix}.$$

Stacionární rozložení pak vypadá následovně

$$\boldsymbol{\pi}(0,15198) = \begin{pmatrix} 0,6744 & 0,1107 & 0,1289 & 0,0475 & 0,0385 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Složky tohoto vektoru vyjadřují pravděpodobnosti výskytu v jednotlivých třídách náhodně vybraného řidiče. Vidíme, že s největší pravděpodobností (67,44 %) se řidič ustálí ve třídě 0 s nejvyšším bonusem. Lze také výsledné hodnoty chápat jako podíly pojištěnců v jednotlivých třídách v dlouhodobém časovém horizontu a v takovémto zastoupení už systém zůstane.

Příklad 4. $(-1/+2$ *úrovně*)
Pro další výpočty budeme potřebovat vyjádřit stacionární rozložení obecně pro nějaké λ. Na základě rovnic (4.4) a (4.5) vytvoříme rozšířenou matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{-\lambda}-1 & \mathrm{e}^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mathrm{e}^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} & 0 & -1 & \mathrm{e}^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} & 0 & -1 & \mathrm{e}^{-\lambda} & 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} & 1-\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} & 1-\mathrm{e}^{-\lambda} & 1-\mathrm{e}^{-\lambda} & -\mathrm{e}^{-\lambda} & 0 \end{array}\right),$$

z které pomocí rutinního, ale zdlouhavého výpočtu získáme stacionární vektor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(\lambda) = \Bigg(& \mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\frac{\lambda\mathrm{e}^{-5\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-4\lambda}-\mathrm{e}^{-2\lambda}}{-2\lambda^2\mathrm{e}^{-6\lambda}+2\lambda^2\mathrm{e}^{-5\lambda}+3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda}-1}\right); \\ & (\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-2\lambda})\left(\frac{\lambda\mathrm{e}^{-5\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-4\lambda}-\mathrm{e}^{-2\lambda}}{-2\lambda^2\mathrm{e}^{-6\lambda}+2\lambda^2\mathrm{e}^{-5\lambda}+3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda}-1}\right); \\ & (1-\mathrm{e}^{-\lambda})\left(\frac{\lambda\mathrm{e}^{-5\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-4\lambda}-\mathrm{e}^{-2\lambda}}{-2\lambda^2\mathrm{e}^{-6\lambda}+2\lambda^2\mathrm{e}^{-5\lambda}+3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda}-1}\right); \\ & \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}+\frac{-\lambda\mathrm{e}^{-5\lambda}+1,5\lambda\mathrm{e}^{-4\lambda}-0,5\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda}+\mathrm{e}^{-2\lambda}-0,5\mathrm{e}^{-\lambda}}{-2\lambda^2\mathrm{e}^{-6\lambda}+2\lambda^2\mathrm{e}^{-5\lambda}+3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda}-1}; \\ & \frac{\lambda\mathrm{e}^{-4\lambda}-2\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}+1}{1-2\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda}}\Bigg). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Správnost vyjádření (4.8) snadno ověříme dosazením hodnoty $\lambda = 0,15198$ a získáme stacionární vektor (4.7).

Kapitola 5

Optimální relativní sazby

Hlavním úkolem pojistného matematika je stanovit relativní sazbu r_l, která je a priori přiřazena pojistitelem ke každé bonusové třídě. Chceme, aby řidiči platili takové pojistné, které je nejblíže jejich rizikovému profilu. V této kapitole představíme jeden ze způsobů nalezení optimální relativní sazby r_l, a to pomocí Baysovského přístupu.

5.1 Bayesovké sazby

Každý řidič má svoji očekávanou škodní frekvenci a rizikový parametr (ten zahrnuje např. zkušenosti a rychlost reakce řidiče), ale oba ukazatele nám jsou neznámé. Proto zavedeme dvě náhodné a na sobě nezávislé veličiny:

- Λ - očekávaná škodní frekvence
- Θ - rizikový parametr (představuje relativní výši pojistného).

Každý klient má tedy neznámou úroveň rizika $\Lambda\Theta$. Výpočty optimální relativní sazby jsou založeny na stacionárním rozložení. Nechť L představuje bonusovou třídu, ve které se řidič ustálí v nekonečném časovém horizontu. Pak pravděpodobnost, že řidič s tímto rizikovým profilem $\Lambda\Theta$ bude po nekonečně dlouhém období zařazen do l–té bonusové třídy, je

$$P[L = l|\Lambda = \lambda_k, \Theta = \theta] = \pi_l(\lambda_k\theta). \tag{5.1}$$

Dále si zavedeme w_k, jako váhu k-té rizikové třídy s očekávanou škodní frekvencí λ_k, tedy pravděpodobnost, že náhodná veličina Λ nabývající hodnoty λ_k se rovná

$$P[\Lambda = \lambda_k] = w_k.$$

Poznámka. Ukázali jsme si v (4.2), že počet pojistných událostí se řídí Poissonovým rozložením. Pokud nyní uvažujeme rizikový faktor Θ, rozložení počtu škod je definováno pravděpodobnosti

$$P(N = n|L(\lambda), \Theta = \theta) = \frac{(\lambda\theta)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}. \tag{5.2}$$

Základní model pro hodnocení rizikového faktoru je založen na gama rozdělení, proto předpokládejme že náhodná veličina $\Theta \sim \Gamma(a,a)$, střední hodnota $E[\Theta] = 1$ a pravděpodobnostní hustota Θ se rovná

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\Gamma(a)} a^a \theta^{a-1} e^{-\theta a}. \tag{5.3}$$

Označme si

- $f_\Theta(\theta)$ jako apriorní hustotu relativní sazby Θ
- $g(\theta|L = l, \Lambda = \lambda_k)$ jako aposteriorní hustotu relativní sazby Θ

Potom aposteriorní hustota veličiny Θ vyjádřená pomocí apriorní hustoty veličiny Θ, známá jako Bayesův vzorec vypadá následovně

$$g(\theta|L = l, \Lambda = \lambda_k) = \frac{P[L = l, \Lambda = \lambda_k|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta)}{P[L = l, \Lambda = \lambda_k]} \tag{5.4}$$

a pro další výpočty si výraz (5.4) upravíme na tvar

$$\begin{aligned} &= \frac{P[L = l|\Theta = \theta, \Lambda = \lambda_k] P[\Lambda = \lambda_k] f_\Theta(\theta)}{P[L = l, \Lambda = \lambda_k]} \\ &= \frac{\pi_l(\lambda_k\theta) w_k f_\Theta(\theta)}{P[L = l, \Lambda = \lambda_k]} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nepodmíněná pravděpodobnost výskytu řidiče ve třídě l může být zapsána jako

$$\begin{aligned} P[L = l] &= \sum_k P[L = l|\Lambda = \lambda_k] P[\Lambda = \lambda_k] \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty P[L = l|\Lambda = \lambda_k, \Theta = \theta] f_\Theta(\theta) \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k\theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Střední kvadratická chyba

Naším úkolem je minimalizovat ztrátovou funkci, za kterou jsem si zvolili střední kvadratickou chybu MSE. Chceme, aby průměrný čtvercový rozdíl mezi pravdivou sazbou Θ a pojistníkem odhadnutou sazbou r_l byl minimální. MSE(r_l) má tedy tvar

$$\begin{aligned} E[(\Theta - r_l)^2] &= \sum_{l=0}^{s} E[(\Theta - r_l)^2|L = l] P[L = l] \\ &= \sum_{l=0}^{s} \int_0^\infty (\Theta - r_l)^2 P[L = l|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{l=0}^{s} \int_0^\infty (\Theta - r_l)^2 \sum_k P[L = l|\Theta = \theta, \Lambda = \lambda_k] P[\Lambda = \lambda_k] f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=0}^{s} (\Theta - r_l)^2 \pi_l(\lambda_k\theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Optimální relativní sazba
Minimalizováním ztrátové funkce (5.7) získáme pro každou bonusovou třídu l optimální relativní sazbu r_l. Ta je rovna střední hodnotě rizikového parametru Θ ze podmínky, ze řidič bude v této třídě, tj. bayesovský odhad neznámého parametru Θ. S použitím (5.5) a (5.6) tak získáme optimální sazbu

$$\begin{aligned} r_l &= E[\Theta|L=l] \\ &= E[E[\Theta|L=l,\Lambda]|L=l] \\ &= \sum_k E[\Theta|L=l,\Lambda=\lambda_k]P|\Lambda=\lambda_k|L=l] \\ &= \sum_k \int_0^\infty \theta g(\theta|L=l,\Lambda=\lambda_k)\,\mathrm{d}\theta\, P[\Lambda=\lambda_k|L=l] \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \frac{\pi_l(\lambda_k\theta)}{P[L=l,\Lambda=\lambda_k]} f_\Theta(\theta) \frac{P[\Lambda=\lambda, L=l]}{P[L=l]} \\ &= \frac{\sum_k w_k \int_0^\infty \theta\pi_l(\lambda_k\theta)f_\Theta(\theta)}{\sum_k w_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k\theta)f_\Theta(\theta)} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Nyní už jen zbývá vyjádřit střední hodnotu relativní sazby r_l, abychom zjistili, jestli nastane finanční rovnováha, takže

$$E[r_l] = E[E[\Theta|L]] = E[\Theta] = 1.$$

Jasně vidíme, že střední hodnota relativní sazby je 100 %, což znamená, že pojišťovna je v ustáleném stavu ve finanční rovnováze a tudíž v součtu vybere od klientů stejnou částku jako bez zavedení systému bonus–malus.

Poznámka. Pokud pojišťovna nepožaduje apriorní stanovení relativních sazeb r_l, všechny λ_k jsou rovny $E[\Lambda] = \overline{\lambda}$ a rovnice (5.8) se pak upraví na tvar

$$r_l = \frac{\int_0^\infty \theta\pi_l(\overline{\lambda}\theta)f_\Theta(\theta)}{\int_0^\infty \pi_l(\overline{\lambda}\theta)f_\Theta(\theta)} \tag{5.9}$$

Příklad 5. ($-1/+2$ *úrovně*)
Pro stanovení optimální relativní sazby si vytvoříme vlastní portfolio s 10.000 uzavřenými pojistnými smlouvami. Zvolíme si 6 segmentačních tříd (odvíjející se od pohlaví a věku), ke každé třídě přiřadíme odhadnutou očekávanou škodní frekvenci škod $\widehat{\lambda_k}$ (vybrané hodnoty převzaté z literatury [3, strana 91]) a počet smluv, podle kterých můžeme dopočítat váhy jednotlivých tříd w_k. Vše shrneme v tabulce 5.1

pohlaví	věk	počet smluv	w_k	$\widehat{\lambda_k}$
žena	18-24	800	0,08	0,165
žena	25-30	1200	0,12	0,14
žena	31-60	1400	0,14	0,13
muž	18-24	1600	0,16	0,238
muž	25-30	1900	0,19	0,15
muž	31-60	3100	0,31	0,12

Tabulka 5.1: Apriorní segmentace řidičů a jejich odhadnuté počty škod

K dalším výpočtům potřebujeme znát odhadnutý parametr $\widehat{a}$ funkce (5.3), zvolíme si $\widehat{a} = 0,82$ (podle literatury [3, strana 45]). Na základě údajů z tabulky 5.1, odhadnutého parametru $\widehat{a}$ a odvozených vzorců v této kapitole můžeme získat numerické charakteristiky systému $(-1/+2)$ a nakonec i optimální relativní sazbu.

1. Chceme spočítat pravděpodobnost, že náhodně vybraný řidič s neznámou střední hodnotou počtu škod $\Lambda\Theta$ skončí v l–té bonus-malus třídě, kterou jsme si označili jako $P[L=l]$ danou vzorcem (5.6).

Začneme výpočtem pravděpodobnosti, že řidič bude v 0–té bonusové třídě. Rozdělíme sumu na součet k tříd a pomocí stacionárního rozložení (4.7) dostaneme

$$
\begin{aligned}
P[L=0] = &\sum_{k=1}^{6} w_k \int_0^\infty \pi_0(\widehat{\lambda_k}\theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
=&w_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\hat{\lambda}_0\theta}\Big(\frac{\widehat{\lambda_0}\theta\mathrm{e}^{-5\hat{\lambda}_0\theta} - \widehat{\lambda_0}\theta\mathrm{e}^{-4\hat{\lambda}_0\theta} - \mathrm{e}^{-2\hat{\lambda}_0\theta}}{-2\widehat{\lambda}_0^2\theta^2\mathrm{e}^{-6\hat{\lambda}_0\theta} + 2\widehat{\lambda}_0^2\theta^2\mathrm{e}^{-5\hat{\lambda}_0\theta} + 3\widehat{\lambda_0}\theta\mathrm{e}^{-3\hat{\lambda}_0\theta} - \widehat{\lambda_0}\theta\mathrm{e}^{-2\hat{\lambda}_0\theta} - 1}\Big) \\
&f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \cdots + \\
&+w_6 \int_0^\infty \Big(\frac{\widehat{\lambda_6}\theta\mathrm{e}^{-4\hat{\lambda}_6\theta} - 2\widehat{\lambda_6}\theta\mathrm{e}^{-3\hat{\lambda}_6\theta} - \mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_6\theta} + 1}{1 - 2\widehat{\lambda_6}\theta\mathrm{e}^{-3\hat{\lambda}_6\theta}}\Big) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Dosadíme parametr $\widehat{a}$ do hustoty veličiny Θ

$$
\begin{aligned}
f_\Theta(\theta) &= \frac{1}{\Gamma(\widehat{a})}\widehat{a}^{\hat{a}}\theta^{\hat{a}-1}e^{-\theta\hat{a}} = \frac{1}{\Gamma(0,82)}0,82^{0,82}\theta^{0,82-1}e^{-0,82\theta} \\
&= \frac{1}{1,14249}0,84982\,\theta^{-0,18}e^{-0,82\theta} = 0,74383\,\theta^{-0,18}e^{-0,82\theta}
\end{aligned}
$$

kde

$$
\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Zbývá už jen dosadit hodnoty a můžeme získat

$$
\begin{aligned}
P[L=0] = &\,0,08\cdot 0,74383\cdot 0,80782+ \\
&+0,12\cdot 0,74383\cdot 0,88589+ \\
&+0,14\cdot 0,74383\cdot 0,92049+ \\
&+0,16\cdot 0,74383\cdot 0,61072+ \\
&+0,19\cdot 0,74383\cdot 0,85406+ \\
&+0,31\cdot 0,74383\cdot 0,967037 = 0,63937.
\end{aligned}
$$

S pravděpodobností $63,9\,\%$ se řidič s neznámou střední hodnotou počtu škod $\Lambda\Theta$ ustálí v třídě 0. Analogickým postupem dopočítáme pravděpodobnosti pro všechny bonusové třídy l.

2. Nyní už máme všechny předpoklady pro to, abychom určili optimální relativní sazby pro 5 bonus-malus tříd. Sazby určíme s ohledem na apriorní segmentaci řidičů dle (5.8), ale také stanovíme sazby bez apriorního rozdělení řidičů do tříd dle (5.9), které si pro odlišení označíme $\overline{r}_l$. Víme, že

$$r_l = E[\Theta|L = l] = \frac{\sum_k w_k \int_0^\infty \theta \pi_l(\widehat{\lambda_k}\theta) f_\Theta(\theta)}{\sum_k w_k \int_0^\infty \pi_l(\widehat{\lambda_k}\theta) f_\Theta(\theta)}$$

Výpočet provádíme obdobně, jako v (5.10). Polovinu práce máme ušetřené, neboť víme, že jmenovatel je rovný hodnotě $P[L = l]$ a tedy dopočítáme čitatel. Ukážeme si hodnotu r_0 pro třídu 0.

$$r_0 = \frac{0,62166}{P[L = 0]} = \frac{0,62166}{0,63937} = 0,9723$$

V bonusové třídě 0 budou řidiči platit 97,2 % ze základního pojistného. Pro stanovení $\overline{r}_l$ potřebujeme dopočítat průměrnou očekávanou frekvenci škod $\overline{\lambda}$. Tu získáme snadným výpočtem

$$E[\Lambda] = \sum_{k=1}^{6} \widehat{\lambda_k} P[\Lambda = \widehat{\lambda_k}] = \sum_{k=1}^{6} \widehat{\lambda_k} w_k = 0,15198 = \overline{\lambda}, \tag{5.11}$$

Hodnota

$$\overline{r}_0 = \frac{0,88992}{0,84787} = 1,04959$$

Zbývá nám ještě ověřit, jestli nastane finanční rovnováha. Použitím vzorce

$$E[r_l] = \sum_{l=0}^{4} r_l P[L = l] \doteq 1$$

se snadno přesvědčíme, že hodnota je (po zaokrouhlení) rovna 1. Od bezeškodních řidičů pojišťovna vybere méně, než od řidičů, které způsobují nehody, ale celkově od všech řidičů vybere stejnou částku, jako v situaci bez použití systému bonus–malus.

Poznámka. Všechny hodnoty jsou pouze přibližné, neboť jsou pro zjednodušení výpočtu zaokrouhlené na 5 desetinných míst.

Numerické výsledky si shrneme v tabulce 5.2

třída l	$\boldsymbol{\pi}(\overline{\lambda})$	$P[L = l]$	r_l	$\overline{r}_l$
0	67,4 %	63,9 %	97,2 %	105 %
1	11,1 %	8,6 %	175,9 %	175,5 %
2	12,9 %	11,6 %	198,1 %	202,8 %
3	4,7 %	10,2 %	212,1 %	235,2 %
4	3,9 %	5,7 %	243,5 %	282,7 %

Tabulka 5.2: Numerické charakteristiky systému $(-1/+2)$

Z tabulky 5.2 vidíme rostoucí průběh funkce r_l i $\overline{r}_l$, což potvrzuje náš předpoklad, že směrem k vyšším (horším) třídám l klient zaplatí vyšší násobek základního pojistného. Z prvních dvou sloupců vyčteme, že většina řidičů bude zařazena do bonusové třídy 0 a nejmenší procento řidičů zastává nejhorší třída 4.

Pravděpodobnost $P[L = l]$ reprezentuje podíl řidičů ve třídě l a r_l představuje relativní sazbu přiřazenou ke každé třídě l. Zhruba 63,9 % řidičů zaplatí ze základního pojistného 97,2 %, obdrží tedy jen 2,8% slevu. V dalších třídách už relativní sazba přesahuje 100 %, v nejhorší třídě 4 dokonce dosahuje 243,5 %.

Hodnoty sloupce $\boldsymbol{\pi}(\overline{\lambda})$ spočtené v (4.6) nám udávají stacionární rozložení všech řidičů s jednotnou průměrnou frekvencí škodovosti $\overline{\lambda}$, tudíž je pro náš rozbor méně podstatný, a slouží jen k porovnání s druhým sloupcem. Poslední $\overline{r}_l$ sloupec též bere v úvahu průměr frekvencí škodovosti všech řidičů $\overline{\lambda}$ a stanovuje tak relativní sazbu bez zahrnutí apriorní segmentace řidičů do rizikových tříd. V porovnání s předchozím sloupcem začíná až na 105% sazbě, ale se zvyšující se třídou roste pomaleji, než když bychom uvažovali systém, který apriorně segmentuje řidiče.

Došli jsme k závěru, že tento náš modelovaný systém s 10.000 řidiči je složen pouze z jedné bonusové třídy, kde můžou řidiči obdržet bonus (slevu), a zbylé čtyři jsou „malusové“, ve kterých platí přirážku k pojistnému. Toto přísné ohodnocení je nejspíše způsobeno tím, že jsem si vybrala řidiče s poměrně vysokou frekvencí nehodovosti.

5.2 Efektivnost bonus-malus systému

Cílem bonus–malus systému je nastavit takové pojistné, které odpovídá ročnímu očekávanému počtu škod každého pojištěnce. Tuto závislost vybraného pojistného na škodní frekvenci λ budeme zkoumat pomocí Loimarantovy efektivity a De Prilovy efektivity.

5.2.1 Loimarantova efektivnost

Průměrná výše vybraného (relativního) pojistného po stabilizování systému s očekávanou škodní frekvencí λ se rovná

$$\overline{r}(\lambda) = \sum_{l=0}^{s} \pi_l(\lambda) r_l. \tag{5.12}$$

Potom můžeme definovat Loimarantovu efektivitu $E_L(\lambda)$, danou jako podíl relativní změny průměrného pojistného a relativní změny škodní frekvence

$$E_L(\lambda) = \frac{\frac{\mathrm{d}\overline{r}(\lambda)}{\overline{r}(\lambda)}}{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}} = \frac{\mathrm{d}\ln \overline{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\ln \lambda}. \tag{5.13}$$

Tato efektivnost je elasticitou nabývající hodnot $E_L(\lambda) \in \langle 0, 1 \rangle$. Pokud chceme dosáhnout dokonale efektivního systému, musí platit $E_L(\lambda) = 1$ (to znamená, že růst λ je přímo úměrný růstu pojistného), tedy platí

$$\frac{\mathrm{d}\overline{r}(\lambda)}{\overline{r}(\lambda)} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

K výpočtu potřebujeme stanovit derivaci $\overline{r}(\lambda)$, kterou získáme derivací vztahu (5.12)

$$\frac{\mathrm{d}\overline{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{l=0}^{s} \frac{\mathrm{d}\pi_l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} r_l, \tag{5.14}$$

přičemž výraz $\frac{\mathrm{d}\pi_l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ získáme derivací vztahu (4.4) a (4.5), tedy řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\boldsymbol{P}(\lambda) + \pi(\lambda)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \\ \sum_{l=0}^{s} \frac{\mathrm{d}\pi_l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Příklad 6. ($-1/+2$ *úrovně*)
Zde budeme uvažovat pro všechny řidiče jednotnou (průměrnou) škodní frekvenci $\overline{\lambda}$, vypočtenou v (5.11). Průměrnou výši pojistného všech řidičů získáme dosazením stacionárního vektoru (4.6) a $\overline{r}_l$ do vzorce (5.12)

$$\overline{r(\lambda)} = \sum_{l=0}^{4} \pi_l(0,15198)\overline{r}_l = 1,384914$$

Vidíme, že od všech řidičů s očekávanou frekvencí škodovosti $\overline{\lambda}$ pojišťovna vybere v průměru 1,38 násobek základního pojistného.

Do systému rovnic (5.15) dosadíme hodnotu $\overline{\lambda} = 0,15198$ a získáme vektor

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \begin{pmatrix} -2,12148 & 0,43682 & 0,63741 & 0,54018 & 0,50707 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

jehož součet složek dává hodnotu 0. Skalárním součinem vektoru relativních sazeb $\overline{r}_l$ a vektoru (5.16) získáme řešení vztahu (5.14)

$$\frac{\mathrm{d}\overline{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{l=0}^{4} \frac{\mathrm{d}\pi_l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} r_l = 2,53572$$

Loimarantovu efektivitu získáme jako

$$E_L(\lambda) = \frac{\mathrm{d}\overline{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\lambda}{\overline{r}(\lambda)} = 2,53572 \cdot \frac{0,15198}{1,38491} = 0,27827. \tag{5.17}$$

Výsledek můžeme interpretovat tak, že nárůst frekvence nehodovosti λ o 10 % odpovídá 2,7 % nárůstu pojistného.

5.2.2 De Prilova efektivnost

Oproti Loimarantově efektivitě De Prilova efektivita závisí na startující třídě l a bere v úvahu hodnotu peněz v čase. Označme si

- $V_l(\lambda)$ jako průměrnou současnou hodnotu zaplaceného pojistného pojistníkem obsazující třídu l s očekávanou roční škodní frekvencí λ

- b_l jako výši pojistného (součin základního a relativního pojistného) ve třídě l
- v jako diskontní faktor.

Jak systém reaguje na změnu celkového očekávaného počtu škod měří De Prilova efektivita $E_D(l,\lambda)$

$$E_D(l,\lambda) = \frac{\frac{\mathrm{d}V_l(\lambda)}{V_l(\lambda)}}{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}} = \frac{\mathrm{d}\ln V_l(\lambda)}{\mathrm{d}\ln(\lambda)}. \tag{5.18}$$

Výpočet $V_l(\lambda)$ pro třídy $l = 0, 1, \ldots, s$ je dán systémem rovnic

$$V_l(\lambda) = b_l + v\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}V_{T_k(l)}(\lambda) \tag{5.19}$$

a derivace $V_l(\lambda)$ mohou být získány řešením systému

$$\frac{\mathrm{d}V_l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = v\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\Big(\Big(\frac{k}{\lambda}-1\Big)V_{T_k(l)}(\lambda) + \frac{\mathrm{d}V_{T_k(l)}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\Big). \tag{5.20}$$

Příklad 7. ($-1/+2$ *úrovně*)
V tomto příkladě také uvažujeme pro všechny řidiče jednotou škodní frekvenci nehodovosti $\overline{\lambda} = 0,15198$. Diskontní faktor si zvolíme $v = 0,96$. Pro zjednodušení si ve výrazu b_l za základní pojistné zvolíme hodnotu 1, tedy v našem případě se $b_l = r_l$.

Pro vysvětlení výraz $V_l(\lambda)$ závisí na startující třídě l oproti tomu $V_{T_k(l)}(\lambda)$ se vztahuje k obsazené třídě l, do které se řidič přesunul na základě k nehod řidiče podle pravidel $(-1/+2)$ v (4.1). Oba představují neznámou proměnnou s indexem l.

Ve výpočtu se omezíme na počet škod $k = 0, \ldots, 5$, neboť pravděpodobnosti více škod jsou podle (4.2) zanedbatelné. A vyjádříme je

$$\begin{aligned}
P(N=0) &= 0,859\\
P(N=1) &= 0,13055\\
P(N=2) &= 0,00992\\
P(N=3) &= 5,02\cdot 10^{-4}\\
P(N=4) &= 1,91\cdot 10^{-5}\\
P(N=5) &= 5,8\cdot 10^{-7}.
\end{aligned}$$

Nyní se můžeme pustit do výpočtu systému 5 rovnic o 5 neznámých podle (5.19) (pro přehlednost vypustíme u označení $V_l(\lambda)$ podmínku λ)

$$\begin{aligned}
V_0 &= \overline{r}_0 + v(0,859\cdot V_0 + 0,13055\cdot V_2 + 0,01044\cdot V_4)\\
V_1 &= \overline{r}_1 + v(0,859\cdot V_0 + 0,13055\cdot V_3 + 0,01044\cdot V_4)\\
V_2 &= \overline{r}_2 + v(0,859\cdot V_1 + 0,14099\cdot V_4)\\
V_3 &= \overline{r}_3 + v(0,859\cdot V_2 + 0,14099\cdot V_4)\\
V_4 &= \overline{r}_4 + v(0,859\cdot V_3 + 0,14099\cdot V_4),
\end{aligned} \tag{5.21}$$

kam dosadíme v a $\overline{r}_l$ a získáme vektor hodnot

$$V_l(\overline{\lambda}) = \begin{pmatrix} 33,8403 & 34,7085 & 35,8919 & 37,1917 & 38,738 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Vyjádříme druhý systém rovnic, tentokrát soustavu derivací $V_l'(\lambda)$ podle (5.20)

$$\begin{aligned} V_0' = v\Big(&0,859(-V_0 + V_0') + 0,13055(5,5798 \cdot V_2 + V_2')+ \\ &+ 0,00992(12,1596 \cdot V_4 + V_4') + 0,000502(18,739 \cdot V_4 + V_4')+ \\ &+ 0,0000191(25,3192 \cdot V_4 + V_4') + 5,8 \cdot 10^{-7}(31,899 \cdot V_4 + V_4')\Big) \end{aligned} \tag{5.23}$$

Pro další třídy $V_l'(\lambda)$ se postupuje analogicky. Nebudeme čtenáře unavovat zdlouhavým výpočtem, do systému rovnic (5.23) dosadíme vypočtené $V_l(\lambda)$ v (5.22) a dostaneme

$$V_l'(\overline{\lambda}) = \begin{pmatrix} 49,0741 & 49,9577 & 50,9577 & 50,6951 & 49,4559 \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

Už nám zbývá jen dosadit vypočtené hodnoty do (5.18) a získáme De Prilovu efektivnost pro každou třídu l

$$\begin{aligned} E_D(0,\overline{\lambda}) &= \frac{\mathrm{d}V_0(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\lambda}{V_0(\lambda)} = 0,2204 \\ E_D(1,\overline{\lambda}) &= \frac{\mathrm{d}V_1(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\lambda}{V_1(\lambda)} = 0,2187 \\ E_D(2,\overline{\lambda}) &= \frac{\mathrm{d}V_2(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\lambda}{V_2(\lambda)} = 0,2155 \\ E_D(3,\overline{\lambda}) &= \frac{\mathrm{d}V_3(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\lambda}{V_3(\lambda)} = 0,2071 \\ E_D(4,\overline{\lambda}) &= \frac{\mathrm{d}V_4(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\lambda}{V_4(\lambda)} = 0,1940 \end{aligned}$$

Globální De Prilova efektivita se určuje jako největší hodnota z výše vypočtených efektivit pro každou třídu. V našem případě $E_D(l,\overline{\lambda}) = 0,2204$, což je o něco nižší hodnota, než Loimarantova efektivita, která vyšla $E_L(\lambda) = 0,27827$.

Závěr

V této práci jsme se zabývali jedním náhodným procesem v čase, a to spojitým Markovským řetězcem. Popsali jsme jeho vlastnosti a chování, definovali si pravděpodobnosti přechodu a intenzity přechodu mezi jednotlivými stavy. Charakteristickou vlastností Markovova řetězce je jeho „bezpaměťovost“, to znamená, že budoucí hodnoty závisí jen na současných hodnotách tohoto řetězce, ne na minulých.

Popsanou teorii jsme aplikovali v praktické části, kde jsme zaměřili na systémy bonus–malus užívanými pojišťovnami. Pomocí Markovova řetězce jsem modelovali pohyb řidiče v systému v závislosti na počtu škod uplatněných v předešlém roce. Speciální tarifní systém bonus–malus se skládá z určitého počtu tříd a pravidel přechodu mezi nimi. Každé třídě odpovídá určitá relativní sazba, která vynásobením se základním pojistným udává hodnotu výsledného pojistného, které klient musí hradit. Při způsobení nehody řidič klesá do horší třídy, kde získává malusy (přirážku) k pojistnému, naopak při jízdě bez nehod, řidič postupuje do lepší třídy, kde obdrží bonusy (slevu) na pojistném. Naším úkolem bylo najít optimální relativní sazby ke každé třídě, které jsme určili minimalizováním střední kvadratické chyby. Na závěr jsme posoudili efektivnost našeho modelu.

Náš zvolený model obsahoval 5 tříd s pravidly označovanými $(-1/+2)$. Vybrala jsem si náhodně portfolio s 10.000 řidiči s různými frekvencemi nehodovosti λ_k. Výpočty jsou založeny na stacionárním rozložení, které ukazuje, jak se bude systém chovat v dlouhodobém horizontu. Relativní sazbu jsme vypočítali s ohledem na apriorní segmentaci řidičů do rizikových tříd, ale pro porovnání i bez tohoto počátečního rozdělení. Podle našich výsledků vyšlo, že většina řidičů bude obsazovat nejlepší třídu 0, kde také obdrží největší slevu na pojistném. Došli k závěru, že náš model je složen pouze z jedné bonusové třídy, kde můžou řidiči obdržet bonus (slevu), a zbylé čtyři jsou „malusové“, ve kterých platí přirážku k pojistnému. Toto přísné ohodnocení naznačuje, že je v systému mnoho řidičů s vysokou frekvencí škodovosti. Efektivnost modelu jsem určila na základě Loimarantovy a De-Prilovy efektivity, které nám ukazují, že zvýšení frekvence nehodovosti je několikanásobně větší než nárůst pojistného.

Seznam použité literatury

[1] BROUHNS, N., Guillén, M., Denuit, M. a Pinquet, J. (2003). *Bonus-Malus Scales in Segmented Tariffs With Stochastic Migration Between Segments.* Journal of Risk and Insurance, vol. 70, no. 4, s. 577–599. ISSN: 0022-4367.

[2] BUDÍKOVÁ, Marie. Přednášky k předmětu *Markovské řetězce*, 2012.

[3] DENUIT, Michel. *Actuarial modelling of claim counts*: risk classification, credibility and bonus-malus systems. Hoboken, N.J.: John Wiley and Sons, c2007, xxvii, 356 s. ISBN 9780470026779.

[4] DICKSON, D., Mary HARDY a H WATERS. *Actuarial mathematics for life contingent risks.* 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, xxi, 597 s. International series on actuarial science. ISBN 9781107044074.

[5] KAAS, R. *Modern actuarial risk theory: using R.* 2nd ed. Berlin: Springer, c2009, xviii, 381 s. ISBN 9783642034077.

[6] KOŘENÁŘ, Václav. *Stochastické procesy.* 2. přeprac. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2010, 227 s. ISBN 9788024516462.

[7] NORRIS, J. *Markov chains.* 1st pbk. ed. New York: Cambridge University Press, 1998, xvi, 237 p. ISBN 0521633966.

[8] PEŠKO, Štefan. *Stochastické modely* (Prednášky pre Slovenskú Poľnohospodársku Univerzitu v Nitre), 2003.

[9] PRÁŠKOVÁ, Zuzana a Petr LACHOUT. *Základy náhodných procesů.* 1. vyd. Praha: Karolinum, 2001, 146 s. Učební texty (Univerzita Karlova). ISBN 8071846880.

[10] STROUKALOVÁ, M. *Modelování systémů bonus-malus.* Praha, 2013. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko–fyzikání fakulta.