

Finanční Matematika – 11. přednáška

Perronova věta, systém bonus malus

Martin Panák

3. května 2016

Theorem

Jestliže je A primitivní matice se spektrálním poloměrem $\lambda \in \mathbb{R}$, pak je λ jednoduchým kořenem charakteristického polynomu matice A , který je ostře větší než absolutní hodnota kteréhokoliv jiného vlastního čísla matice A . K vlastnímu číslu λ navíc existuje vlastní vektor x s výhradně kladnými prvky x_i .

V důkazu se budeme opírat o intuici elementární geometrie. Částečně budeme použité koncepty upřesňovat už v analytické geometrii ve čtvrté kapitole, některé analytické aspekty budeme studovat podrobněji v kapitolách páté a později, přesné důkazy některých analytických kroků v této učebnici nepodáme vůbec. Snad budou následující úvahy nejen osvětlovat dokazovaný teorém, ale budou také samy o sobě motivací pro naše další studium geometrie i matematické analýzy.

Uvažme libovolný mnohostěn P obsahující počátek $0 \in \mathbb{R}^n$.
Jestliže nějaká iterace lineárního zobrazení $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
zobrazuje P do jeho vnitřku, pak je spektrální poloměr zobrazení ψ
ostře menší než jedna.

Uvažme libovolný mnohostěn P obsahující počátek $0 \in \mathbb{R}^n$. Jestliže nějaká iterace lineárního zobrazení $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazuje P do jeho vnitřku, pak je spektrální poloměr zobrazení ψ ostře menší než jedna.

Uvažme matici A zobrazení ψ ve standardní bázi. Protože vlastní čísla A^k jsou k -té mocniny vlastních čísel matice A , můžeme rovnou bez újmy na obecnosti předpokládat, že samotné zobrazení ψ již zobrazuje P do vnitřku P . Zjevně tedy nemůže mít ψ žádnou vlastní hodnotu s absolutní hodnotou větší než jedna.

Důkaz dále povedeme sporem. Předpokládejme, že existuje vlastní hodnota λ s $|\lambda| = 1$. Máme tedy dvě možnosti. Buď je $\lambda^k = 1$ pro vhodné k nebo takové k neexistuje.

Obrazem P je uzavřená množina (to znamená, že pokud se body v obrazu budou hromadit k nějakému bodu y v \mathbb{R}^n , bude y opět v obrazu) a hranici P tento obraz vůbec neprotíná. Nemůže tedy mít ψ pevný bod na hranici P ani nemůže existovat žádný bod na hranici, ke kterému by se mohly libovolně blížit body v obrazu.

Obrazem P je uzavřená množina (to znamená, že pokud se body v obrazu budou hromadit k nějakému bodu y v \mathbb{R}^n , bude y opět v obrazu) a hranici P tento obraz vůbec neprotíná. Nemůže tedy mít ψ pevný bod na hranici P ani nemůže existovat žádný bod na hranici, ke kterému by se mohly libovolně blížit body v obrazu. První argument vylučuje, že by nějaká mocnina λ byla jedničkou, protože to by takový pevný bod na hranici P jistě existoval. Ve zbývajícím případě jistě existuje dvourozměrný podprostor $W \subseteq \mathbb{R}^n$, na nějž se ψ zužuje coby rotace o iracionální argument a jistě existuje bod y v průniku W s hranicí P . Pak by ale byl bod y libovolně přesně přiblížen body z množiny $\psi^n(y)$ při průchodu přes všechny iterace, a tedy by musel sám být také v obrazu.

Obrazem P je uzavřená množina (to znamená, že pokud se body v obrazu budou hromadit k nějakému bodu y v \mathbb{R}^n , bude y opět v obrazu) a hranici P tento obraz vůbec neprotíná. Nemůže tedy mít ψ pevný bod na hranici P ani nemůže existovat žádný bod na hranici, ke kterému by se mohly libovolně blížit body v obrazu. První argument vylučuje, že by nějaká mocnina λ byla jedničkou, protože to by takový pevný bod na hranici P jistě existoval. Ve zbývajícím případě jistě existuje dvourozměrný podprostor $W \subseteq \mathbb{R}^n$, na nějž se ψ zužuje coby rotace o iracionální argument a jistě existuje bod y v průniku W s hranicí P . Pak by ale byl bod y libovolně přesně přiblížen body z množiny $\psi^n(y)$ při průchodu přes všechny iterace, a tedy by musel sám být také v obrazu. Došli jsme tedy ke sporu a lemma je ověřeno.

Nyní se dáme do důkazu Perronovy věty. Naším prvním krokem bude ověření existence vlastního vektoru, který má všechny prvky kladné. Uvažme za tím účelem tzv. standardní simplex

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T; |x| = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Nyní se dáme do důkazu Perronovy věty. Naším prvním krokem bude ověření existence vlastního vektoru, který má všechny prvky kladné. Uvažme za tím účelem tzv. standardní simplex

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T; |x| = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Protože všechny prvky v matici A jsou nezáporné, obraz $A \cdot x$ bude mít samé nezáporné souřadnice stejně jako x a alespoň jedna z nich bude vždy nenulová.

Nyní se dáme do důkazu Perronovy věty. Naším prvním krokem bude ověření existence vlastního vektoru, který má všechny prvky kladné. Uvažme za tím účelem tzv. standardní simplex

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T; |x| = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Protože všechny prvky v matici A jsou nezáporné, obraz $A \cdot x$ bude mít samé nezáporné souřadnice stejně jako x a alespoň jedna z nich bude vždy nenulová. Zobrazení $x \mapsto |A \cdot x|^{-1}(A \cdot x)$ proto zobrazuje S do sebe, Toto zobrazení $S \rightarrow S$ splňuje všechny předpoklady tzv. Brouwerovy věty o pevném bodě a proto existuje vektor $y \in S$ takový, že je tímto zobrazením zobrazen sám na sebe.

Nyní se dáme do důkazu Perronovy věty. Naším prvním krokem bude ověření existence vlastního vektoru, který má všechny prvky kladné. Uvažme za tím účelem tzv. standardní simplex

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T; |x| = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Protože všechny prvky v matici A jsou nezáporné, obraz $A \cdot x$ bude mít samé nezáporné souřadnice stejně jako x a alespoň jedna z nich bude vždy nenulová. Zobrazení $x \mapsto |A \cdot x|^{-1}(A \cdot x)$ proto zobrazuje S do sebe, Toto zobrazení $S \rightarrow S$ splňuje všechny předpoklady tzv. Brouwerovy věty o pevném bodě a proto existuje vektor $y \in S$ takový, že je tímto zobrazením zobrazen sám na sebe. To ale znamená, že

$$A \cdot y = \lambda y, \quad \lambda = |A \cdot y|$$

a našli jsme vlastní vektor, který leží v S .

Protože ale má nějaká mocnina A^k podle našeho předpokladu samé kladné prvky a samozřejmě je také $A^k \cdot y = \lambda^k y$, všechny souřadnice vektoru y jsou ostře kladné (tj. leží ve vnitřku S) a $\lambda > 0$.

Protože ale má nějaká mocnina A^k podle našeho předpokladu samé kladné prvky a samozřejmě je také $A^k \cdot y = \lambda^k y$, všechny souřadnice vektoru y jsou ostře kladné (tj. leží ve vnitřku S) a $\lambda > 0$.

Abychom dokázali zbytek věty, budeme uvažovat zobrazení zadané maticí A ve výhodnější bázi a navíc ho vynásobíme konstantou λ^{-1} :

$$B = \lambda^{-1}(Y^{-1} \cdot A \cdot Y),$$

kde Y je diagonální matice se souřadnicemi y_i právě nalezeného vlastního vektoru y na diagonále. Evidentně je B také primitivní matice a navíc je vektor $z = (1, \dots, 1)^T$ jejím vlastním vektorem s vlastní hodnotou 1, protože zjevně $Y \cdot z = y$.

Protože ale má nějaká mocnina A^k podle našeho předpokladu samé kladné prvky a samozřejmě je také $A^k \cdot y = \lambda^k y$, všechny souřadnice vektoru y jsou ostře kladné (tj. leží ve vnitřku S) a $\lambda > 0$.

Abychom dokázali zbytek věty, budeme uvažovat zobrazení zadané maticí A ve výhodnější bázi a navíc ho vynásobíme konstantou λ^{-1} :

$$B = \lambda^{-1}(Y^{-1} \cdot A \cdot Y),$$

kde Y je diagonální matice se souřadnicemi y_i právě nalezeného vlastního vektoru y na diagonále. Evidentně je B také primitivní matice a navíc je vektor $z = (1, \dots, 1)^T$ jejím vlastním vektorem s vlastní hodnotou 1, protože zjevně $Y \cdot z = y$. Jestliže nyní dokážeme, že $\mu = 1$ je jednoduchým kořenem charakteristického polynomu matice B a všechny ostatní kořeny mají absolutní hodnotu ostře menší než jedna, bude Perronova věta dokázána.

K tomu se nám teď bude hodit dříve dokázané pomocné lemma. Uvažujme matici B jako matici lineárního zobrazení, které zobrazuje řádkové vektory

$$u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto u \cdot B = v ,$$

tj. pomocí násobení zprava. Díky tomu, že je $z = (1, \dots, 1)^T$ vlastním vektorem matice B , je součet souřadnic řádkového vektoru v roven

$$\sum_{i,j=1}^n u_i b_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i = 1,$$

K tomu se nám teď bude hodit dříve dokázané pomocné lemma. Uvažujme matici B jako matici lineárního zobrazení, které zobrazuje řádkové vektory

$$u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto u \cdot B = v,$$

tj. pomocí násobení zprava. Díky tomu, že je $z = (1, \dots, 1)^T$ vlastním vektorem matice B , je součet souřadnic řádkového vektoru v roven

$$\sum_{i,j=1}^n u_i b_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i = 1,$$

kdykoliv je $u \in S$. Proto toto zobrazení zobrazuje simplex S na sebe a má také jistě v S vlastní (řádkový) vektor w s vlastní hodnotou jedna (pevný bod, opět dle Brouwerovy věty). Protože nějaká mocnina B^k obsahuje samé ostře pozitivní prvky, je nutně obraz simplexu S v k -té iteraci zobrazení daného B uvnitř S . To už jsme blízko použití našeho lemmatu, které jsme si pro důkaz připravili.

Budeme i nadále pracovat s řádkovými vektory a označme si P posunutí simplexu S do počátku pomocí vlastního vektoru w , který jsme právě našli, tj. $P = -w + S$. Evidentně je P mnohostěn obsahující počátek a vektorový podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ generovaný P je invariantní vůči působení matice B pomocí násobení řádkových vektorů zprava. Zúžení našeho zobrazení na P tedy splňuje předpoklady pomocného lemmatu, a proto nutně musí být všechny jeho vlastní hodnoty v absolutní hodnotě menší než jedna.

Budeme i nadále pracovat s řádkovými vektory a označme si P posunutí simplexu S do počátku pomocí vlastního vektoru w , který jsme právě našli, tj. $P = -w + S$. Evidentně je P mnohostěn obsahující počátek a vektorový podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ generovaný P je invariantní vůči působení matice B pomocí násobení řádkových vektorů zprava. Zúžení našeho zobrazení na P tedy splňuje předpoklady pomocného lemmatu, a proto nutně musí být všechny jeho vlastní hodnoty v absolutní hodnotě menší než jedna. Ještě se musíme vypořádat se skutečností, že právě uvažované zobrazení je dáno násobením řádkových vektorů zprava maticí B (zatímco nás původně zajímalo chování zobrazení, zadaného maticí B pomocí násobení sloupcových vektorů zleva). To je ale ekvivalentní násobení transponovaných sloupcových vektorů transponovanou maticí B obvyklým způsobem zleva. Dokázali jsem tedy vlastně potřebné tvrzení o vlastních číslech pro matici transponovanou k naší matici B . Transponování ale vlastní čísla nemění.

Budeme i nadále pracovat s řádkovými vektory a označme si P posunutí simplexu S do počátku pomocí vlastního vektoru w , který jsme právě našli, tj. $P = -w + S$. Evidentně je P mnohostěn obsahující počátek a vektorový podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ generovaný P je invariantní vůči působení matice B pomocí násobení řádkových vektorů zprava. Zúžení našeho zobrazení na P tedy splňuje předpoklady pomocného lemmatu, a proto nutně musí být všechny jeho vlastní hodnoty v absolutní hodnotě menší než jedna. Ještě se musíme vypořádat se skutečností, že právě uvažované zobrazení je dáno násobením řádkových vektorů zprava maticí B (zatímco nás původně zajímalo chování zobrazení, zadaného maticí B pomocí násobení sloupcových vektorů zleva). To je ale ekvivalentní násobení transponovaných sloupcových vektorů transponovanou maticí B obvyklým způsobem zleva. Dokázali jsem tedy vlastně potřebné tvrzení o vlastních číslech pro matici transponovanou k naší matici B . Transponování ale vlastní čísla nemění. Dimenze prostoru V je přitom $n - 1$, takže důkaz věty je ukončen.

Následující velice užitečné tvrzení má při znalosti Perronovy věty až překvapivě jednoduchý důkaz a ukazuje, jak silná je vlastnost primitivnosti matice zobrazení.

Corollary

Jestliže $A = (a_{ij})$ je primitivní matice a $x \in \mathbb{R}^n$ její vlastní vektor se všemi souřadnicemi nezápornými a vlastní hodnotou λ , pak $\lambda > 0$ je spektrální poloměr A . Navíc platí

$$\min_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \lambda \leq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

Uvažme vlastní vektor x z dokazovaného tvrzení. Protože je A primitivní, můžeme zvolit pevně k tak, aby A^k už měla samé pozitivní prvky, a pak je samozřejmě i $A^k \cdot x = \lambda^k x$ vektor se samými ostře kladnými souřadnicemi. Nutně proto je $\lambda > 0$.

Uvažme vlastní vektor x z dokazovaného tvrzení. Protože je A primitivní, můžeme zvolit pevně k tak, aby A^k už měla samé pozitivní prvky, a pak je samozřejmě i $A^k \cdot x = \lambda^k x$ vektor se samými ostře kladnými souřadnicemi. Nutně proto je $\lambda > 0$. Z Perronovy věty víme, že spektrální poloměr μ je vlastním číslem a zvolme takový vlastní vektor y k μ , že rozdíl $x - y$ má samé kladné souřadnice. Potom nutně pro všechny mocniny n

$$0 < A^n \cdot (x - y) = \lambda^n x - \mu^n y,$$

ale zároveň platí $\lambda \leq \mu$. Odtud již vyplývá $\lambda = \mu$.

Zbývá odhad spektrálního poloměru pomocí minima a maxima součtů jednotlivých sloupců matice. Označme je b_{\min} a b_{\max} , zvolme za x vektor se součtem souřadnic jedna a počítejme:

Zbývá odhad spektrálního poloměru pomocí minima a maxima součtů jednotlivých sloupců matice. Označme je b_{\min} a b_{\max} , zvolme za x vektor se součtem souřadnic jedna a počítejme:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^n \lambda x_i = \lambda,$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) x_j \leq \sum_{j=1}^n b_{\max} x_j = b_{\max},$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{j=1}^n b_{\min} x_j = b_{\min}.$$

Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost, splňují:

- existuje jediný vlastní vektor x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní,
- iterace $T^k x_0$ se blíží k vektoru x_∞ pro jakýkoliv počáteční pravděpodobnostní vektor x_0 .

O stavu systému řekneme, že je **přechodový**, jestliže v něm systém setrvává s pravděpodobností ostře menší než jedna. Za **absorpční** označíme stav, ve kterém systém setrvává s pravděpodobností 1 a do kterého se lze dostat s nenulovou pravděpodobností z kteréhokoliv z přechodových stavů.

O stavu systému řekneme, že je **přechodový**, jestliže v něm systém setrvává s pravděpodobností ostře menší než jedna. Za **absorpční** označíme stav, ve kterém systém setrvává s pravděpodobností 1 a do kterého se lze dostat s nenulovou pravděpodobností z kteréhokoliv z přechodových stavů. Konečně, Markovův řetězec x_n je **absorpční**, jestliže jsou jeho všechny jeho stavy buď absorpční nebo přechodové.

O stavu systému řekneme, že je **přechodový**, jestliže v něm systém setrvává s pravděpodobností ostře menší než jedna. Za **absorpční** označíme stav, ve kterém systém setrvává s pravděpodobností 1 a do kterého se lze dostat s nenulovou pravděpodobností z kteréhokoliv z přechodových stavů. Konečně, Markovův řetězec x_n je **absorpční**, jestliže jsou jeho všechny jeho stavy buď absorpční nebo přechodové.

Je-li v absorpčním Markovově řetězci prvních r stavů systému absorpčních, pro stochastickou matici T systému to znamená, že se rozpadá na „blokově“ horní trojúhelníkový tvar

$$T = \begin{pmatrix} E & R \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice, jejíž rozměr je dán počtem absorpčních stavů, zatímco R je kladná matice a Q nezáporná.

$$T = \begin{pmatrix} E & R \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice, jejíž rozměr je dán počtem absorpčních stavů, zatímco R je kladná matice a Q nezáporná. V každém případě iteracemi této matice budeme pořád dostávat stejný blok nulových hodnot v levém dolním bloku, a tedy zcela jistě nebude primitivní, např.

$$T^2 = \begin{pmatrix} E & R + R \cdot Q \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix}.$$

$$T = \begin{pmatrix} E & R \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice, jejíž rozměr je dán počtem absorpčních stavů, zatímco R je kladná matice a Q nezáporná. V každém případě iteracemi této matice budeme pořád dostávat stejný blok nulových hodnot v levém dolním bloku, a tedy zcela jistě nebude primitivní, např.

$$T^2 = \begin{pmatrix} E & R + R \cdot Q \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix}.$$

I o takových maticích lze získat hodně informací pomocí plné Perronovy–Frobeniovy teorie a se znalostí pravděpodobnosti a statistiky také odhadovat střední doby, po kterých se systém dostane do jednoho z absorpčních stavů apod.

Určitá vlastnost živočišného druhu je podmíněna nezávisle na pohlaví jistým genem – dvojicí alel. Každý jedinec získává po jedné alele od obou rodičů zcela náhodně a nezávisle na sobě. Existují formy genu dané různými alelami a , A . Ty určují tři možné stavy aa , $aA = Aa$, AA vyšetřované vlastnosti.

Určitá vlastnost živočišného druhu je podmíněna nezávisle na pohlaví jistým genem – dvojicí alel. Každý jedinec získává po jedné alele od obou rodičů zcela náhodně a nezávisle na sobě. Existují formy genu dané různými alelami a , A . Ty určují tři možné stavy aa , $aA = Aa$, AA vyšetřované vlastnosti.

- (a) Předpokládejte, že každý jedinec jisté populace se bude rozmnožovat výhradně s jedincem jiné populace, ve které se vyskytuje pouze vlastnost podmíněná dvojicí aA . Právě jeden jejich (náhodně zvolený) potomek bude ponechán na stanovišti a také on se bude rozmnožovat výhradně s jedincem té jiné populace atd. Stanovte výskyt kombinací aa , aA , AA v uvažované populaci po dostatečně dlouhé době.

Určitá vlastnost živočišného druhu je podmíněna nezávisle na pohlaví jistým genem – dvojicí alel. Každý jedinec získává po jedné alele od obou rodičů zcela náhodně a nezávisle na sobě. Existují formy genu dané různými alelami a , A . Ty určují tři možné stavy aa , $aA = Aa$, AA vyšetřované vlastnosti.

- (a) Předpokládejte, že každý jedinec jisté populace se bude rozmnožovat výhradně s jedincem jiné populace, ve které se vyskytuje pouze vlastnost podmíněná dvojicí aA . Právě jeden jejich (náhodně zvolený) potomek bude ponechán na stanovišti a také on se bude rozmnožovat výhradně s jedincem té jiné populace atd. Stanovte výskyt kombinací aa , aA , AA v uvažované populaci po dostatečně dlouhé době.
- (b) Řešte úlohu uvedenou ve variantě (a), pokud je jiná populace tvořena pouze jedinci s dvojicí alel AA .

Určitá vlastnost živočišného druhu je podmíněna nezávisle na pohlaví jistým genem – dvojicí alel. Každý jedinec získává po jedné alele od obou rodičů zcela náhodně a nezávisle na sobě. Existují formy genu dané různými alelami a , A . Ty určují tři možné stavy aa , $aA = Aa$, AA vyšetřované vlastnosti.

- (a) Předpokládejte, že každý jedinec jisté populace se bude rozmnožovat výhradně s jedincem jiné populace, ve které se vyskytuje pouze vlastnost podmíněná dvojicí aA . Právě jeden jejich (náhodně zvolený) potomek bude ponechán na stanovišti a také on se bude rozmnožovat výhradně s jedincem té jiné populace atd. Stanovte výskyt kombinací aa , aA , AA v uvažované populaci po dostatečně dlouhé době.
- (b) Řešte úlohu uvedenou ve variantě (a), pokud je jiná populace tvořena pouze jedinci s dvojicí alel AA .
- (c) Náhodně zvolené dva jedince opačného pohlaví zkřížíte. Z jejich potomstva opět náhodně vyberete dva jedince opačného pohlaví, které zkřížíte. Pokud takto budete pokračovat velmi dlouho dobu, vypočtete pravděpodobnost, že oba křížení jedinci budou mít dvojici alel AA (příp. aa) (proces

- (d) Řešte úlohu uvedenou ve variantě (c) bez kladení podmínky, že křížení jedinci mají stejné rodiče. Pouze tedy křížíte jedince jisté velké populace mezi sebou, potom křížíte potomky mezi sebou atd.

Případ (a). Jedná se o Markovův proces zadaný maticí

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

přičemž pořadí stavů odpovídá pořadí dvojic alel aa , aA , AA . Hodnoty v prvním sloupci plynou z toho, že potomek jedince s dvojicí alel aa a jedince s dvojicí alel aA má s pravděpodobností $1/2$ dvojici aa a s pravděpodobností $1/2$ dvojici aA . Analogicky postupujeme pro třetí sloupec. Hodnoty ve druhém sloupci potom vyplývají z toho, že každý ze čtyř případů dvojic alel aa , aA , Aa , AA je stejně pravděpodobný u jedince, jehož oba rodiče mají dvojici alel aA . Uvědomme si, že na rozdíl od počítání pravděpodobností, kdy musíme rozlišovat dvojici aA od Aa (která z alel pochází od kterého z rodičů), vlastnosti podmíněné dvojicemi aA a Aa jsou samozřejmě stejné.

Pro určení výsledného stavu stačí nalézt pravděpodobnostní vektor, který přísluší vlastnímu číslu 1 matice T , protože matice

$$T^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

splňuje podmínku Perronovy-Frobeniovy věty (všechny její prvky jsou kladné). Hledaný pravděpodobnostní vektor je

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)^T,$$

což již dává pravděpodobnosti $1/4$, $1/2$, $1/4$ výskytu po řadě kombinací aa , aA , AA po velmi dlouhé (teoreticky nekonečné) době.

Případ (b). Pro pořadí dvojic alel AA , aA , aa nyní dostáváme pravděpodobnostní matici přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihned vidíme všechna vlastní čísla 1, 1/2 a 0 (odečteme-li je od diagonály, hodnost obdržené matice nebude 3, tj. touto maticí zadaná homogenní soustava bude mít netriviální řešení). Těmto vlastním číslům přísluší po řadě vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proto je

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odsud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zřejmě pro velká $n \in \mathbb{N}$ můžeme nahradit 2^{-n} za 0, což implikuje

$$T^n \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud tedy plodí potomky jedinci původní populace výhradně s členy populace, ve které se vyskytuje pouze dvojice alel AA , nutně po dostatečně velkém počtu křížení dojde k tomu, že dvojice aA a aa zcela vymizí (bez ohledu na jejich původní četnost).

Případ (c). Tentokrát budeme mít 6 možných stavů (v tomto pořadí)

$AA, AA;$

$aA, AA;$

$aa, AA;$

$aA, aA;$

$aa, aA;$

$aa, aa,$

přičemž tyto stavy jsou dány různými případy genotypů rodičů. Matice odpovídajícího Markovova řetězce je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/16 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud budeme např. uvažovat situaci (druhý sloupec), kdy jeden z rodičů má dvojici alel AA a druhý aA , pak zjevně může nastat každý ze čtyř případů (jde-li o dvojice alel jejich dvou náhodně zvolených potomků)

$AA, AA; \quad AA, aA; \quad aA, AA; \quad aA, aA$

se stejnou pravděpodobností. Pravděpodobnost setrvání ve druhém stavu je proto $1/2$ a pravděpodobnost přechodu ze druhého stavu do prvního je $1/4$ a do čtvrtého také $1/4$.

Nyní bychom měli opět určit mocniny T^n pro velká $n \in \mathbb{N}$.
Uvážením podoby prvního a posledního sloupce, vidíme, že

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad \text{a} \quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$$

jsou vlastní vektory matice T příslušné vlastnímu číslu 1.
Přechodem ke čtyřrozměrné podmatici matice T (vynecháním právě prvního a šestého řádku a sloupce) nalezneme poté zbylá vlastní čísla

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

V tomto příkladu jsme dostali stejné vlastní vektory příslušné číslu 1 a ostatní vlastní čísla měla rovněž absolutní hodnotu ostře menší 1 (jejich přesné hodnoty jsme nevyužívali). Dostáváme tak totožný závěr, že proces se blíží k pravděpodobnostnímu vektoru

$$(a, 0, 0, 0, 0, 1 - a)^T,$$

kde $a \in [0, 1]$ je dáno výchozím stavem. Protože pouze na první a šesté pozici výsledného vektoru mohou být nenulová čísla, stavy

$$aA, AA; \quad aa, AA; \quad aA, aA; \quad aa, aA$$

po mnohonásobném křížení vymizí. Uvědomme si dále že pravděpodobnost toho, aby proces končil AA, AA , se rovná relativní četnosti výskytu A v počátečním stavu.

Případ (d). Necht' hodnoty $a, b, c \in [0, 1]$ udávají (při zachování pořadí) relativní četnosti výskytu dvojic alel AA, aA, aa v dané populaci. Chceme získat vyjádření relativních četností dvojic AA, aA, aa v potomstvu populace. Probíhá-li výběr dvojic pro páření náhodně, lze při velkém počtu jedinců očekávat, že relativní četnost páření jedinců s dvojicemi alel AA (u obou) je a^2 , relativní četnost páření jedinců, z nichž jeden má dvojici alel AA a druhý aA , je $2ab$, relativní četnost páření jedinců s dvojicemi alel aA (u obou) je b^2 atd. Potomek rodičů s dvojicemi AA, AA musí dvojici alel AA zdědit.

Pravděpodobnost, že potomek rodičů s dvojicemi AA , aA bude mít AA , je zřejmě $1/2$ a pravděpodobnost, že potomek rodičů s dvojicemi aA , aA bude mít AA , je pak $1/4$. Jiné případy pro potomka s dvojicí alel AA uvažovat nemusíme (pokud má jeden rodič dvojici alel aa , potomek nemůže mít dvojici AA). Relativní četnost výskytu dvojice alel AA v potomstvu je tedy

$$a^2 \cdot 1 + 2ab \cdot \frac{1}{2} + b^2 \cdot \frac{1}{4} = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}.$$

Analogicky stanovíme postupně relativní četnosti dvojic aA a aa v potomstvu ve tvarech

$$ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}$$

a

$$c^2 + bc + \frac{b^2}{4}.$$

Na tento proces můžeme nahlížet jako na zobrazení T , které transformuje vektor $(a, b, c)^T$. Platí

$$T : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix}.$$

Podotkněme, že za definiční obor (a pochopitelně i obor hodnot) T vlastně bereme pouze vektory

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ kde } a, b, c \in [0, 1], a + b + c = 1.$$

Chtěli bychom zadat operaci T pomocí násobení vektoru $(a, b, c)^T$ jistou konstantní maticí. To však očividně není možné (zobrazení T není lineární). Nejedná se tedy o Markovův proces a nelze zjednodušit určování, co se stane po velmi dlouhé době, jako v předešlých případech. Můžeme ale vypočítat, co se stane, když aplikujeme zobrazení T dvakrát po sobě. Ve druhém kroku dostáváme

$$T : \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_2^1 \\ t_2^2 \\ t_2^3 \end{pmatrix},$$

kde

$$t_2^1 = \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right)^2 + \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) + \frac{1}{4} \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right)^2,$$

$$t_2^2 = \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) + \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right) + 2 \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right)^2,$$

$$t_2^3 = \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right)^2 + \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right)^2.$$

Lze ukázat (využitím $a + b + c = 1$), že

$$t_2^1 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}, \quad t_2^2 = ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}, \quad t_2^3 = c^2 + bc + \frac{b^2}{4},$$

tj.

$$T : \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix}.$$

Získali jsme tak překvapivý výsledek, že dalším aplikováním transformace T se vektor obdržení v prvním kroku nezmění. To znamená, že výskyt uvažovaných dvojic alel je po libovolně dlouhé době totožný jako v první generaci potomstva. Pro velkou populaci jsme tak dokázali, že evoluční vývoj by se realizoval během jediné generace, kdyby nedocházelo k mutacím nebo k selekci.

Nechť jsou dány dvě urny, které obsahují dohromady n bílých a n černých koulí. V pravidelných časových intervalech je z obou urn vylosována jedna koule a přemístěna do druhé urny, přičemž počet koulí v obou urnách je na začátku (a tedy po celou dobu) právě n . Zadejte tento Markovův proces pravděpodobnostní maticí přechodu T .

Tento příklad se používá ve fyzice jako model prolínání dvou nestlačitelných kapalin (již v roce 1769 ho zavedl D. Bernoulli) nebo analogicky jako model difúze plynů. Stav $0, 1, \dots, n$ budou odpovídat kupř. počtu bílých koulí v jedné pevně zvolené urně. Tento údaj totiž současně zadává, kolik černých koulí je ve zvolené urně (všechny ostatní koule jsou pak ve druhé z uren). Pokud v jistém kroku dojde ke změně stavu $j \in \{1, \dots, n\}$ na $j - 1$, znamená to, že ze zvolené urny byla vytažena bílá koule a z druhé černá. To se stane s pravděpodobností

$$\frac{j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{j^2}{n^2}.$$

Přechodu ze stavu $j \in \{0, \dots, n - 1\}$ do $j + 1$ odpovídá vytažení černé koule ze zvolené urny a bílé z té druhé s pravděpodobností

$$\frac{n - j}{n} \cdot \frac{n - j}{n} = \frac{(n - j)^2}{n^2}.$$

Soustava zůstane ve stavu $j \in \{1, \dots, n - 1\}$, jestliže z obou uren byly vytaženy koule stejné barvy, což má pravděpodobnost

Při užití tohoto modelu ve fyzice nás samozřejmě zajímá složení urn po uplynutí určité doby (po daném počtu výměn v závislosti na předešlém složení urn). Bude-li počáteční stav např. 0, můžeme pomocí mocnin matice T sledovat, s jakou pravděpodobností přibývají ve zvolené urně bílé koule. Také lze potvrdit očekávaný výsledek, že počáteční rozdělení koulí bude ovlivňovat jejich rozdělení po delší době zanedbatelným způsobem.

Při užití tohoto modelu ve fyzice nás samozřejmě zajímá složení urn po uplynutí určité doby (po daném počtu výměn v závislosti na předešlém složení urn). Bude-li počáteční stav např. 0, můžeme pomocí mocnin matice T sledovat, s jakou pravděpodobností přibývají ve zvolené urně bílé koule. Také lze potvrdit očekávaný výsledek, že počáteční rozdělení koulí bude ovlivňovat jejich rozdělení po delší době zanedbatelným způsobem. Kdybychom jednotlivé koule očíslovali, místo výběru po jedné kouli z urn vylosovali nějaké z čísel $1, 2, \dots, 2n$ a kouli, jejíž číslo bylo vytaženo, přemístili do druhé urny, obdrželi bychom Markovův proces se stavy $0, 1, \dots, 2n$ (počet koulí ve zvolené urně), kdy se tak už nerozlišuje barva koulí. Tento Markovův řetězec je rovněž ve fyzice důležitý. (P. a T. Ehrenfestovi jej zavedli v roce 1907.) Používá se jako model výměny tepla mezi dvěma izolovanými tělesy (teplota je reprezentována počtem koulí, tělesa urnami).