# Finanční Matematika – 12. přednáška
# Systém bonus malus

Martin Panák

9. května 2016

Uvažme bonus-malus systém, kde máme řidiče rozděleny do pěti tříd ($l = 0, 1, \ldots 4$). Při způsobení nehody se řidič na konci pozorovaného období pousouvá do třídy 4, při bezeškodním průběhu o jednu třídu níže. Uvažme tento systém jako Markovův řetězec. Jeho matice přechodu je

$$P = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Při volbě $\lambda = 0.1$ postupně dostaneme pro $j \geq 4$:

$$P^j = \begin{pmatrix} 0.670319 & 0.670319 & 0.670319 & 0.670319 & 0.670319 \\ 0.070498 & 0.070498 & 0.070498 & 0.070498 & 0.070498 \\ 0.077913 & 0.077913 & 0.077913 & 0.077913 & 0.077913 \\ 0.086107 & 0.086107 & 0.086107 & 0.086107 & 0.086107 \\ 0.095163 & 0.095163 & 0.095163 & 0.095163 & 0.095163 \end{pmatrix}$$

Buď $L$ náhodná veličina popisující bonus-malus třídu náhodně vybraného pojistníka, $w_k$ je váha rizikové třídy s $\lambda_k$ ($k = 0 \ldots$ počet tříd), $\pi(\lambda)$ stacionární vektor Markovova procesu daného bonus-malus systémem pro parametr $\lambda$. Potom je

$$P[L = l] = \sum_k \omega_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)$$

Buď $L$ náhodná veličina popisující bonus-malus třídu náhodně vybraného pojistníka, $w_k$ je váha rizikové třídy s $\lambda_k$ ($k = 0 \ldots$ počet tříd), $\pi(\lambda)$ stacionární vektor Markovova procesu daného bonus-malus systémem pro parametr $\lambda$. Potom je

$$P[L = l] = \sum_k \omega_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)$$

Pro každou bonus-malus třídu $l$ se snažíme určit její tzv. „relativní sazbu" (dále též relativitu), tj. procentní podíl vůči základní sazbě (může být stejná pro všechny řidiče – relativity bez apriorní klasifikace, nebo může být závislá na rizikové třídě – relativity s apriorní klasifikací)

Ve třídách volíme relativity tak, abychom se „co nejvíce přiblížili“ skutečné nehodovosti (dané koeficientem $\Theta\lambda$):

$$
\begin{aligned}
E[(\Theta - r_L)^2] = & \sum_{l=0}^{s} E[(\Theta - r_l)^2 | L = l] P[L = l] = \\
& = \sum_{l=0}^{s} \int_0^\infty (\theta - r_l)^2 P[L = l | \Theta = \theta] dF_\Theta \theta \\
& = \sum_k \omega_k \int_0^\infty \sum_{l=0}^{s} (\theta - r_l)^2 \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)
\end{aligned}
$$

Ve třídách volíme relativity tak, abychom se „co nejvíce přiblížili“ skutečné nehodovosti (dané koeficientem $\Theta\lambda$):

$$E[(\Theta - r_L)^2] = \sum_{l=0}^{s} E[(\Theta - r_l)^2 | L = l] P[L = l] =$$

$$= \sum_k \omega_k \int_0^\infty \sum_{l=0}^{s} (\theta - r_l)^2 \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)$$

Ve třídách volíme relativity tak, abychom se „co nejvíce přiblížili“ skutečné nehodovosti (dané koeficientem $\Theta\lambda$):

$$E[(\Theta - r_L)^2] = \sum_{l=0}^{s} E[(\Theta - r_l)^2 | L = l] P[L = l] =$$

$$= \sum_{l=0}^{s} \int_0^\infty (\theta - r_l)^2 P[L = l | \Theta = \theta] dF_\Theta \theta$$

$$= \sum_k \omega_k \int_0^\infty \sum_{l=0}^{s} (\theta - r_l)^2 \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)$$

Řešením je

$$\begin{aligned} r_l &= E[\Theta|L = l] = \\ &= \sum_k E[\Theta|L = l, \Lambda = \lambda] Pr[\Lambda = \lambda_k | L = l] = \\ &= \sum_k \int_0^\infty \theta \frac{P[L = l|\Theta = \theta, \Lambda = \lambda_k]\omega_k}{P[L = l, \Lambda = \lambda_k]} dF_\Theta(\theta) \frac{P[\Lambda = \lambda_k, L = l]}{P[L = l]} \\ &= \frac{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \theta \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)}{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)} \end{aligned}$$

Řešením je

$$r_l = E[\Theta | L = l] =$$

$$= \sum_k \int_0^\infty \theta \frac{P[L = l | \Theta = \theta, \Lambda = \lambda_k]\omega_k}{P[L = l, \Lambda = \lambda_k]} dF_\Theta(\theta) \frac{P[\Lambda = \lambda_k, L = l]}{P[L = l]}$$

$$= \frac{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \theta \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)}{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)}$$

Řešením je

$$r_l = E[\Theta | L = l] =$$

$$= \frac{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \theta \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)}{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)}$$

Řešením je

$$
\begin{aligned}
r_l &= E[\Theta | L = l] = \\
&= \sum_k E[\Theta | L = l, \Lambda = \lambda] Pr[\Lambda = \lambda_k | L = l] = \\
&= \sum_k \int_0^\infty \theta \frac{P[L = l | \Theta = \theta, \Lambda = \lambda_k]\omega_k}{P[L = l, \Lambda = \lambda_k]} dF_\Theta(\theta) \frac{P[\Lambda = \lambda_k, L = l]}{P[L = l]} \\
&= \frac{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \theta \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)}{\sum_k \omega_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) dF_\Theta(\theta)}
\end{aligned}
$$

# Efektivita systému bonus-malus

Loimairantova efektivita

Měří, jak rychle se změna ve vstupních datech systému projeví v relativitách jednotlivých tříd.

Loimairantova efektivita

Měří, jak rychle se změna ve vstupních datech systému projeví v relativitách jednotlivých tříd. Označme $\bar{r}(\lambda)$ průměrnou relativní sazbu pojistníka s očekávanou škodní frekvencí danou rozložením $Poi(\lambda)$. Je to tedy vážený průměr

$$\bar{r}(\lambda) = \sum_{l=0}^{s} \pi_l(\lambda) r_l.$$

Loimarantova efektivita je elasticitou této sazby jakožto funkce $\lambda$.

$$Eff_{Loi}(\lambda) = \frac{d\bar{r}(\lambda)}{\bar{r}(\lambda)} = \frac{d \ln \bar{r}(\lambda)}{d \ln \lambda}$$

Globální efektivitu pak definujeme váženým průměrem přes všechny třídy

$$Eff_{Loi} = E[Eff_L oi(\Lambda\Theta)].$$

## De Prilova efektivita

Nechť $v < 1$ je diskontní faktor, $b_l$ je sazba, kterou platí pojištěnec se škodní frekvencí $\nu$ v bonus-malusové třídě $l$.

## De Prilova efektivita

Nechť $v < 1$ je diskontní faktor, $b_l$ je sazba, kterou platí pojištěnec se škodní frekvencí $\nu$ v bonus-malusové třídě $l$. Dále nechť $V_l^{(n)}(\nu)$ je průměrná současná cena pojistného, kterou zaplatí pojištěněc s frekvencí $\nu$ ve třídě $l$ v následujících $n$ letech.

## De Prilova efektivita

Nechť $v < 1$ je diskontní faktor, $b_l$ je sazba, kterou platí pojištěnec se škodní frekvencí $\nu$ v bonus-malusové třídě $l$. Dále nechť $V_l^{(n)}(\nu)$ je průměrná současná cena pojistného, kterou zaplatí pojištěněc s frekvencí $\nu$ ve třídě $l$ v následujících $n$ letech. Pak

$$V_0^{(n)}(\nu) = b_l + v \sum_{k=0}^{\infty} P[N = k|\lambda\Theta = \nu] V_{T_k(l)}^{(n-1)}(\nu),$$

## De Prilova efektivita

Nechť $v < 1$ je diskontní faktor, $b_l$ je sazba, kterou platí pojištěnec se škodní frekvencí $\nu$ v bonus-malusové třídě $l$. Dále nechť $V_l^{(n)}(\nu)$ je průměrná současná cena pojistného, kterou zaplatí pojištěněc s frekvencí $\nu$ ve třídě $l$ v následujících $n$ letech. Pak

$$V_0^{(n)}(\nu) = b_l + v \sum_{k=0}^{\infty} P[N = k | \lambda\Theta = \nu] V_{T_k(l)}^{(n-1)}(\nu),$$

Potom definujeme

$$V_l(\nu) = \lim_{n \to \infty} V_0^{(n)}(\nu)$$

## De Prilova efektivita

Nechť $v < 1$ je diskontní faktor, $b_l$ je sazba, kterou platí pojištěnec se škodní frekvencí $\nu$ v bonus-malusové třídě $l$. Dále nechť $V_l^{(n)}(\nu)$ je průměrná současná cena pojistného, kterou zaplatí pojištěněc s frekvencí $\nu$ ve třídě $l$ v následujících $n$ letech. Pak

$$V_0^{(n)}(\nu) = b_l + v \sum_{k=0}^{\infty} P[N = k|\lambda\Theta = \nu] V_{T_k(l)}^{(n-1)}(\nu),$$

Potom definujeme

$$V_l(\nu) = \lim_{n\to\infty} V_0^{(n)}(\nu)$$

$$V_l(\nu) = b_l + v \sum_{k=0}^{\infty} P[N = k|\lambda\Theta = \nu] V_{T_k(l)}(\nu)$$

## De Prilova efektivita

Nechť $v < 1$ je diskontní faktor, $b_l$ je sazba, kterou platí pojištěnec se škodní frekvencí $\nu$ v bonus-malusové třídě $l$. Dále nechť $V_l^{(n)}(\nu)$ je průměrná současná cena pojistného, kterou zaplatí pojištěněc s frekvencí $\nu$ ve třídě $l$ v následujících $n$ letech. Pak

$$V_0^{(n)}(\nu) = b_l + v \sum_{k=0}^{\infty} P[N = k | \lambda\Theta = \nu] V_{T_k(l)}^{(n-1)}(\nu),$$

Potom definujeme

$$V_l(\nu) = \lim_{n \to \infty} V_0^{(n)}(\nu)$$

$$V_l(\nu) = b_l + v \sum_{k=0}^{\infty} P[N = k | \lambda\Theta = \nu] V_{T_k(l)}(\nu)$$

Konečně

$$Eff_{DeP}(l, \nu) = \frac{\frac{dV_l(\nu)}{V_l(\nu)}}{\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}}.$$