Finanční Matematika – 8. přednáška

Martin Panák

11. dubna 2016

Příklad *Dva střelci vystřelí každý dvě rány na terč. První má pravděpodobnost zásahu 80%, druhý 60%. V terči se našly dvě rány. Jaká je pravděpodobnost, že obě patří prvnímu střelci?*

Pravděpodobnost zásahu prvního střelce jsou tedy $4/5$, druhého $3/5$. Uvažme dva jevy:

Pravděpodobnost zásahu prvního střelce jsou tedy $4/5$, druhého $3/5$. Uvažme dva jevy:
$A \dots$ v terči se našly dva zásahy patřící prvnímu střelci,

Pravděpodobnost zásahu prvního střelce jsou tedy $4/5$, druhého $3/5$. Uvažme dva jevy:

$A \dots$ v terči se našly dva zásahy patřící prvnímu střelci,

$B \dots$ v terči se našly dva zásahy.

Pravděpodobnost zásahu prvního střelce jsou tedy $4/5$, druhého $3/5$. Uvažme dva jevy:
$A \dots$ v terči se našly dva zásahy patřící prvnímu střelci,
$B \dots$ v terči se našly dva zásahy.
Dle zadání úlohy máme zjistit $P(A|B)$. Rozdělme jev B na šest disjunktních jevů podle toho, který střelec a který svůj výstřel do terče umístil. Jevy uvedeme v tabulce a u každého navíc spočítáme pravděpodobnost toho, že nastane. Uvědomíme si při tom, že každá uvažovaná střelba se skládá ze čtyř nezávislých jevů: výsledek střelby hráče A či B v prvním či druhém výstřelu.
V tabulce značíme zásah jedničkou, minutí terče nulou.

	1. střelec		2.střelec		pst nastoupení jevu
B_1	0	1	0	1	$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$
B_2	0	1	1	0	$\frac{24}{25^2}$
B_3	1	0	1	0	$\frac{24}{25^2}$
B_4	1	0	0	1	$\frac{24}{25^2}$
B_5	1	1	0	0	$\frac{64}{25^2}$
B_6	0	0	1	1	$\frac{9}{25^2}$

	1. střelec		2.střelec		pst nastoupení jevu
B_1	0	1	0	1	$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$
B_2	0	1	1	0	$\frac{24}{25^2}$
B_3	1	0	1	0	$\frac{24}{25^2}$
B_4	1	0	0	1	$\frac{24}{25^2}$
B_5	1	1	0	0	$\frac{64}{25^2}$
B_6	0	0	1	1	$\frac{9}{25^2}$

Sečtením pravděpodobnosti těchto disjunktních jevů dostáváme:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(B_i) = 169/625.$$

	1. střelec		2.střelec		pst nastoupení jevu
B_1	0	1	0	1	$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$
B_2	0	1	1	0	$\frac{24}{25^2}$
B_3	1	0	1	0	$\frac{24}{25^2}$
B_4	1	0	0	1	$\frac{24}{25^2}$
B_5	1	1	0	0	$\frac{64}{25^2}$
B_6	0	0	1	1	$\frac{9}{25^2}$

Sečtením pravděpodobnosti těchto disjunktních jevů dostáváme:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(B_i) = 169/625.$$

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu podmíněné pravděpodobnosti

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B_5)}{P(B)} = \frac{\frac{64}{625}}{\frac{169}{625}} = \frac{64}{169} \doteq 0{,}38.$$

Příklad *Mirek má čtyři sáčky, v každém jsou bílé a černé kuličky a to v těchto počtech: čtyři bílé; tři bílé a jedna černá; dvě bílé a dvě černé; jedna bílá a tři černé. Mirek náhodně jeden sáček vybral a náhodně z něj vytáhl jednu kouli. Byla černá. Mirek tento sáček zahodil a náhodně vybral jeden ze zbylých tří sáčků a z něj náhodně jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?*

Jako A označíme jev, že Mirek náhodně vybral sáček a z něj náhodně černou kouli. Tento jev disjunktním sjednocením jevů A_i, $i = 2, 3, 4$, k de A_i je jev, že Mirek vybral i-tý sáček a z něj potom černou kouli.

Jako A označíme jev, že Mirek náhodně vybral sáček a z něj náhodně černou kouli. Tento jev disjunktním sjednocením jevů A_i, $i = 2, 3, 4$, k de A_i je jev, že Mirek vybral i-tý sáček a z něj potom černou kouli.
Pravděpodobnost vytažení libovolné (černé) koule stejná a tedy $P(A_2|A) = \frac{1}{6}$, $P(A_3|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a $P(A_4|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jako A označíme jev, že Mirek náhodně vybral sáček a z něj náhodně černou kouli. Tento jev disjunktním sjednocením jevů A_i, $i = 2, 3, 4$, k de A_i je jev, že Mirek vybral i-tý sáček a z něj potom černou kouli.
Pravděpodobnost vytažení libovolné (černé) koule stejná a tedy $P(A_2|A) = \frac{1}{6}$, $P(A_3|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a $P(A_4|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Nechť B je jev, že Mirek po zahození jednoho ze sáčků vybral ze zbylých bílou kouli. Pokud vyhodil druhý sáček, tak ve zbylých sáččích je dohromady 7 bílých koulí a pravděpodobnost, že vytáhne jednu z nich je $P(B|A_2) = \frac{7}{12}$ (opět můžeme použít klasickou pravděpodobnost, protože v každém sáčku je stejný počet koulí a tedy má každá stejnou pravděpodobnost, že bude vytažena).

Jako A označíme jev, že Mirek náhodně vybral sáček a z něj náhodně černou kouli. Tento jev disjunktním sjednocením jevů A_i, $i = 2, 3, 4$, k de A_i je jev, že Mirek vybral i-tý sáček a z něj potom černou kouli.
Pravděpodobnost vytažení libovolné (černé) koule stejná a tedy $P(A_2|A) = \frac{1}{6}$, $P(A_3|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a $P(A_4|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Nechť B je jev, že Mirek po zahození jednoho ze sáčků vybral ze zbylých bílou kouli. Pokud vyhodil druhý sáček, tak ve zbylých sáčcích je dohromady 7 bílých koulí a pravděpodobnost, že vytáhne jednu z nich je $P(B|A_2) = \frac{7}{12}$ (opět můžeme použít klasickou pravděpodobnost, protože v každém sáčku je stejný počet koulí a tedy má každá stejnou pravděpodobnost, že bude vytažena).
Obdobně $P(B|A_3) = \frac{8}{12}$ a $P(B|A_4) = \frac{9}{12}$. Hledaná pravděpodobnost je

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \\
&= P(B|A_2)P(A_2|A) + P(B|A_3)P(A_3|A) + P(B|A_4)P(A_4|A) = \\
&= \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6} + \frac{8}{12}\cdot\frac{1}{3} + \frac{9}{12}\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

=

Příklad *Mirek má čtyři sáčky, v každém jsou bílé a černé kuličky a to v těchto počtech: jedna bílá a jedna černá; tři bílé a jedna černá; jedna bílá a dvě černé; jedna bílá a tři černé. Mirek náhodně jeden sáček vybral a náhodně z něj vytáhl jednu kouli. Byla bílá. Mirek tento sáček zahodil a náhodně vybral jeden ze zbylých tří sáčků a z něj náhodně jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?*

Podobně jako v předchozím příkladě uvážíme jev A, totiž že Mirek vybral náhodně sáček a z něj náhodně bílou kouli jako sjednocení čtyř disjunktních jevů A_1, A_2, A_3 a A_4: Mirek vytáhl bílou kouli a před tím zahodil první, resp. druhý, resp. třetí, resp. čtvrtý sáček. Pravděpodobnost vytažení bílé koule z prvního sáčku je $P(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ (jev A_1 je dán tím, že současně nastaly dva nezávislé jevy a to, že vytáhl první sáček a že z prvního sáčku vytáhl bílou kouli), podobně $P(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$, $P(A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$, $P(A_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$. $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{11}{24}$.

Podobně jako v předchozím příkladě uvážíme jev A, totiž že Mirek vybral náhodně sáček a z něj náhodně bílou kouli jako sjednocení čtyř disjunktních jevů A_1, A_2, A_3 a A_4: Mirek vytáhl bílou kouli a před tím zahodil první, resp. druhý, resp. třetí, resp. čtvrtý sáček. Pravděpodobnost vytažení bílé koule z prvního sáčku je $P(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ (jev A_1 je dán tím, že současně nastaly dva nezávislé jevy a to, že vytáhl první sáček a že z prvního sáčku vytáhl bílou kouli), podobně $P(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$, $P(A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$, $P(A_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$. $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{11}{24}$. Všimněme si, že pravděpodobnost $P(A)$ nemůžeme počítat klasickou pravděpodobností, tedy prostým podělením počtu bílých koulí ku počtu všech koulí, protože například pravděpodobnost vytažení dané koule v prvním sáčku je dvojnásobná oproti vytažení dané koule ze čtvrtého sáčku. Pro podmíněné pravděpodobnosti pak platí $P(A_1|A) = P(A_1)/P(A) = \frac{3}{11}$, $P(A_2|A) = \frac{9}{22}$, $P(A_3|A) = \frac{2}{11}$, $P(A_4|A) = \frac{3}{22}$.

Označíme ještě písmenem B jev, že Mirek po zahození jednoho ze sáčků vytáhne bílou kouli. Zbývá ještě dopočítat $P(B|A_i)$, $i = 1, \ldots 4$. Jev $P(B|A_1)$ rozdělíme na tři disjunktní jevy B_2, B_3, B_4, totiž že druhá vytažená koule byla z druhého, resp. třetího, resp. čtvrtého sáčku. Celkem

$$P(B|A_1) = P(B_2|A_1) + P(B_3|A_1) + P(B_4|A_1) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{9}.$$

$$P(B|A_1) = P(B_2|A_1) + P(B_3|A_1) + P(B_4|A_1) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{9}.$$

Obdobně

$$P(B|A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{36},$$
$$P(B|A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$
$$P(B|A_4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{36}.$$

Celkem pak

$$P(B|A_1) = P(B_2|A_1) + P(B_3|A_1) + P(B_4|A_1) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{9}.$$

Obdobně

$$P(B|A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{36},$$
$$P(B|A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$
$$P(B|A_4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{36}.$$

Celkem pak

$$P(B|A) = P(B|A_1)P(A_1|A) + P(B|A_2)P(A_2|A) +$$
$$+ P(B|A_3)P(A_3|A) + P(B|A_4)P(A_4|A) =$$
$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{11} + \frac{13}{36} \cdot \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11} + \frac{19}{36} \cdot \frac{3}{22} = \frac{19}{44}.$$