Stochastické metody interpolace

I. Strukturní analýza (variografie)

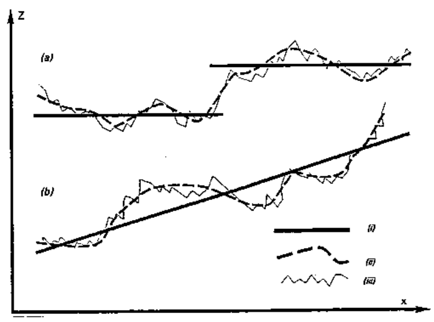
Strukturní analýza a metody krigingu

Žádná z dosud zmíněných interpolačních metod neřešila následující problémy:

- počet bodů nutných k výpočtu lokálního průměru
- velikost orientaci a tvar okolí
- zda neexistuje jiná cesta k definování vah než funkce vzdálenosti bodů
- jaké jsou chyby a nejistoty spojené s interpolovanými hodnotami

Odpovědi poskytují geostatistické postupy založené na tzv. **strukturní analýze.** Její výsledky jsou využitelné v interpolačních postupech **krigingu**.

Základní komponenty spojitého povrchu



I – trendová složka – drift
ii – regionalizovaná proměnná
iii – náhodná složka

Základní komponenty spojitého povrchu

$$Z(x) = \mu(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon''$$

***x* - pozice v 1, 2 či 3 rozměrném prostoru**

***Z* - interpolovaná proměnná**

Z(x)* - hodnota proměnné v bodě *x

***μ(x)* - deterministická složka (trend)**

ε'(x)* - stochastická složka (regionalizovaná proměnná) - lokálně proměnné, ale prostorově závislé reziduum od *μ(x)

***ε''* - náhodná, prostorově nezávislá složka, gaussovský šum s nulovým průměrem a s rozptylem σ^2.**

Velké písmeno *Z* značí, že se jedná o náhodnou funkci a ne o měřenou hodnotu proměnné *z*.

Odhad jednotlivých komponent $Z(x) = \mu(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon''$

1) Trendová složka se odhadne vhodnou funkcí a odečte. Pokud je **trend nulový**, potom μ(x) bude rovno průměru hodnot *z.*

Průměrný (očekávaný E = expected) rozdíl mezi jakýmikoliv dvojicemi hodnot kde *Z(x)* a *Z(X+h)* bude nula

$$E[Z(x) - Z(x+h)] = 0$$

Z(x) a *Z(X+h)* jsou odhady hodnot náhodné proměnné z v poloze *x, x+h.*

2) Rozptyl rozdílů závisí pouze na vzdálenosti mezi místy, ne na poloze (**podmínka stacionarity**) tedy:

$$E\left[\{Z(x) - Z(x+h)\}^2\right] = E\left[\{\varepsilon'(x) - \varepsilon'(x+h)\}^2\right] = 2\gamma(h)$$

***γ(h)* - semivariance**

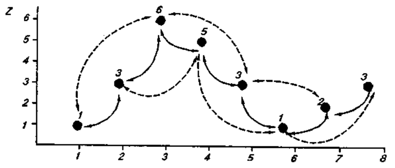
Pokud máme odhad proměnné *μ(x),* zbývající kolísání má konstantní rozptyl a diference mezi dvěma místy jsou pouze funkcí jejich vzdálenosti:

$$Z(x) = \mu(x) + \gamma(h) + \varepsilon''$$

Strukturní analýza - variografie

- Geostatistická strukturní analýza - procedura zahrnující výpočet strukturálních funkcí, výběr a konstrukci odpovídajících teoretických modelů a jejich aplikace, interpretaci průběhu strukturálních funkcí.
- Cílem je popsat takové vlastnosti jako jsou **kontinuita, homogenita, stacionarita** či **anizotropie** pole studovaných prostorových proměnných veličin.
- Tyto vlastnosti jsou popisovány prostřednictvím měr prostorové autokorelace a prostorové variability.
- Ke kvantifikaci prostorové autokorelace, která vyjadřuje skutečnost, že objekty blízké si jsou více podobné než objekty vzdálenější slouží **strukturální funkce -** měří sílu korelačního vztahu jako funkci vzdálenosti.
- Strukturální analýza je výchozím krokem geostatistického modelování.
- Sama o sobě ale poskytuje řadu velmi důležitých informací o struktuře náhodného pole jako modelu konkrétního objektu v krajinné sféře.

Příklad výpočtu měr prostorové variability pro 1D - řadu hodnot



průměr = (1+3+6+5+3+1+2+3)/8=3,0

rozptyl=[(1-3)²+(3-3)²+(6-3)²+(5-3)²+(3-3)²+(1-3)²+(2-3)²+(2-3)²]/8=2,75

kovariance(1)=[(1-3)(3-3)+(3-3)*(6-3)+(6-3)*(5-3)+(5-3)*(3-3)+(3-3)*(1-3)+(1-3)*(2-3)+(2-3)*(3-3)]/7=1,14*

semivariance(1)=[(1-3)²+(3-6)²+(6-5)²+(5-3)²+(3-1)²+(1-2)²+(2-3)²]/7=3,43

semivariance(2)=[(1-6)²+(3-5)²+(6-3)²+(5-1)²+(3-2)²+(1-3)²]/6=9,83

semivariance(3)=[(1-5)²+(3-3)²+(6-1)²+(5-2)²+(3-3)²]/5=12,50

Semivariance jako strukturální funkce

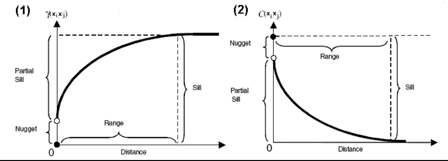
$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\left[Z(x) - Z(x+h)\right]^2$$

Jsou-li dva body blízko sebe (h je malé), bude rozdíl hodnot studované veličiny Z(*x*) těchto bodech malý.

S růstem vzdálenosti si budou hodnoty méně podobné.

Grafickým vyjádřením závislosti semivariance na vzdálenosti je strukturální funkce nazývaná **semivariogram**.

Semivariogram (1) je **mírou nepodobnosti**. Jinou strukturální funkcí je kovarianční funkce – ta je mírou podobnosti (2). Obě jsou měrami prostorové autokorelace.



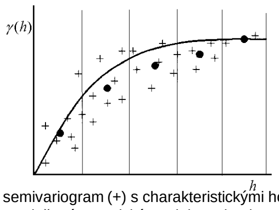
Experimentální semivariogram

Strukturní analýza – výpočet semivariogramu z naměřených dat:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(z(x_i) - z(x_i+h)\right)^2$$

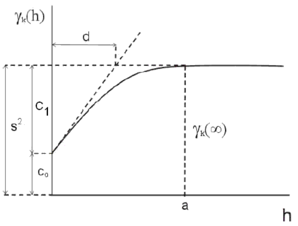
n - počet dvojic bodů pozorování proměnné s atributem *z* vzdálených o hodnotu *h*

h - tzv. lag - vzdálenost dané dvojice bodů.



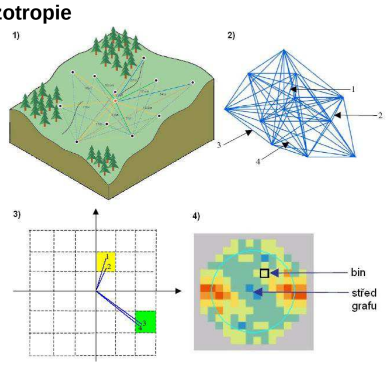
Experimentální semivariogram (+) s charakteristickými hodnotami pro vzdálenosti h (•) a proložený teoretický model semivariogramu (plná čára)

Prvky semivariogramu



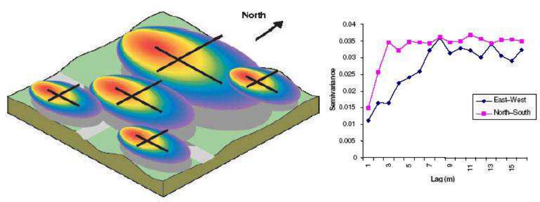
a - dosah (range), c_0 - zbytkový rozptyl (nugget), c=c_0 + c_1 - práh (sill), h – lag (krok vzdálenosti), d – rozpětí

Efekt anizotropie



Princip grupování hodnot semivariancí na základě podobné vzdálenosti a plošný graf semivariance (4).

Efekt anizotropie



Povrch vykazující efekt anizotropie a odpovídající empirické semivariogramy

Anizotropní semivariogram se liší především odlišnou hodnotou dosahu pro specifické směry, další charakteristiky semivariogramu (typ, práh, zbytkový rozptyl) se většinou nemění.

Takovouto anizotropii označujeme jako **geometrickou**.

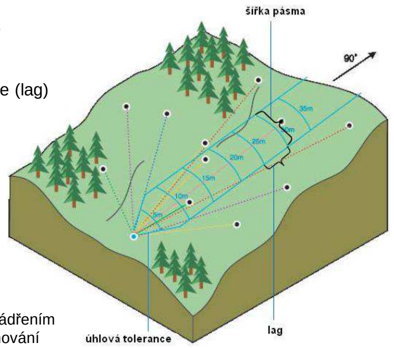
V případě, že nelze použít stejný model semivariogramu resp. stejné hodnoty prahu a zbytkového rozptylu hovoříme o tzv. **zonální** anizotropii.

Parametry tzv. směrových semivariogramů

• úhlová tolerance

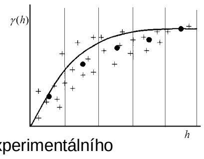
• šířka pásma

• délková tolerance (lag)



Efekt anizotropie je vyjádřením náhodného procesu chování studované veličiny. Nelze ho zaměňovat s trendovou složkou.

Teoretický semivariogram



Je to model, který nejlépe aproximuje průběh experimentálního semivariogramu v okolí počátku a prahu.

Právě proces hledání teoretického semivariagramu se někdy označuje jako strukturní analýza.

Modely semivariogramů se dělí podle chování v okolí počátku a v „nekonečnu“ do několika skupin:

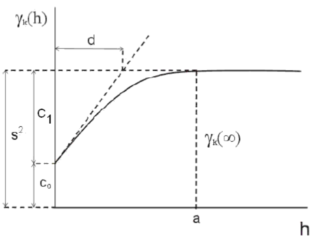
• modely přechodového typu - tj. s prahem (sférický, kvadratický, gaussovský, exponenciální),

• modely bez přechodu (lineární, logaritmický),

• modely s oscilujícím prahem (sinový, cosinový),

• čistě náhodný model

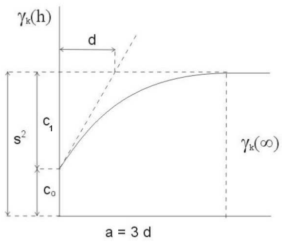
Sférický model



$$\gamma(h) = c_0 + c_1 * \left[\frac{3}{2}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right] \quad \text{pro} \quad h \le a$$

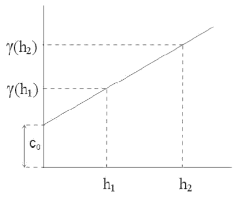
$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \quad \text{pro} \quad h > a$$

Exponenciální model



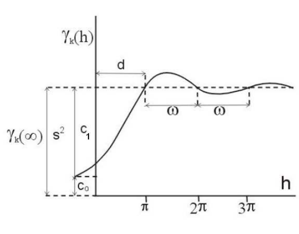
$$\gamma(h) = c_0 + c_1 * \left[1 - \exp(-h/d)\right] \quad \text{kde} \quad a = 3d$$

Lineární model



$$\gamma(h) = c_0 + bh \quad \text{kde b je směrnice přímky}$$

Sinový model

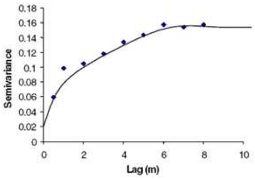


$$\gamma(h) = c_0 + c_1\left[1 - \frac{\sin(gh)}{gh}\right] \quad \text{kde} \quad g = \pi/\omega$$

Náhodný model

$$\gamma(h) = c_0$$

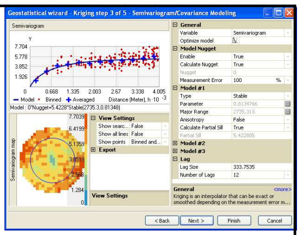
Složené modely



$$\gamma_T(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \gamma_3(h) + \ldots$$

Indikátorové modely semivariogramů - konstruují se a využívají při strukturální analýze nominálních (kvalitativních) dat (barva, druh horniny).

Analýza a interpretace strukturálních funkcí I.



• Konstrukci semivarioagramu a odvození teoretického modelu by měla předcházet důkladná **analýza vstupních dat** (ESDA)

• Důležitý je počet bodů uvažovaných pro vyjádření hodnot semivariance pro daný lag (h). Značný podíl šumu ve variogramu může být způsoben malým rozsahem vzorku použitého k výpočtu.

• K dosažení stabilních hodnot se doporučuje 20–30, v některých případech však až 50-100 hodnot. Je-li jejich počet nízký, stoupá chyba odhadu.

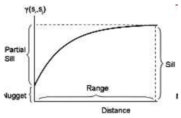
• Hladší průběh semivariogramu lze docílit zvětšením **velikosti vyhledávacího okna (větším h).**

• Vzdálenosti mohu být modifikovány efektem anizotropie - potom je nutné měnit **tvar okolí**. Anizotoropie však může být výsledkem i nedostatečného počtu vzorků.

• Lag (h) se volí jako **průměrná minimální vzdálenost mezi sousedními body.**

• Výpočet experimentálních semivariogramů se doporučuje provádět do **vzdálenosti h ≤ L/2**, kde L je maximální vzdálenost míst pozorování v poli.

Analýza a interpretace strukturálních funkcí II.



• Přednost má **jednodušší teoretický model** semivariogramu, který dobře vystihuje hlavní rysy experimentálních hodnot, před modelem složitějším.

• V případě výpočtu experimentálního semivariogramu z nepravidelně sítě pozorování je nutno počítat s vyšší „rozkolísanosti" stanovených bodů kolem teoretického modelu.

• **Úroveň prahu** se obvykle doporučuje volit podle hodnoty statistického rozptylu.

• Je-li **hodnota dosahu** použitého teoretického semivariagramu malá vzhledem k hodnotám empirickým, je možné zmenšit hodnotu kroku *h* a naopak

• Při prokládání tečny počátkem experimentálního semivariogramu pro určení rozpětí musíme respektovat skutečnost, že **funkce semivariogramu je vždy kladná.** Hodnota rozpětí je důležitá pro aplikaci oscilačních semivarigramů.

• Při **interpretaci zbytkového rozptylu** musíme uvážit i možný vliv chyb měření (technických chyb) výchozích pozorování.

Analýza a interpretace strukturálních funkcí III.

• Pro účely interpolace a metodou krigování je účelné zvolit **jednoduchý a robustní model**, vystihující chování a okolí počátku až do úrovně prahu.

• Při interpretaci je důležité vycházet z dobré znalosti objektu v krajinné sféře a z využití všech informací o jeho parametrech.

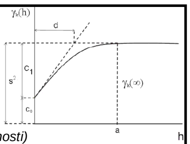
• Při analýze anizotropie je podle zkušenosti dobré volit pro všechny směrové semivariogramy **stejný teoretický model**.

• Obecně je účelné postupovat tak, že v počáteční fázi aplikace geostatistických metod na přírodní objekt se provede podrobná interpretace strukturálních funkcí a v následných fázích se podle získaných zkušeností použije zjednodušený základní model.

• Analýza semivariogramu je podstatným krokem k určení optimálních vah pro interpolaci. Jestliže ve semivariogamu **dominuje náhodná složka** (ε''), potom data obsahují takový šum, že interpolace nemá smysl. Jako nejlepší odhad *z(x)* je vhodné použít průměrnou hodnotu.

Charakteristiky pole popsané strukturní analýzou

a - dosah
d – rozpětí
c_0 - zbytkový rozptyl
$c=c_0 + c_1$ - práh
h – lag (krok vzdálenosti)



Kontinuita – je vyjádřena hodnotou dosahu. Pole s větší kontinuitou se vyznačuje vyšší prostorovou autokorelací.

Nehomogenita – projevuje se tzv. oscilací hodnoty prahu. Délka poloviny periody odpovídá průměrnému rozměru elementů nehomogenity. Nehomogenity na dané úrovni pozorování nepostižitelné se projeví jako zbytkový rozptyl.

Nestacionarita - projevuje se zpravidla parabolickým nárůstem křivky semivariogramu. Prokazatelná je případech, kdy dochází k parabolickému růstu křivky až za hodnotou dosahu, tedy na stabilizované části křivky. Nestacionarita pole dokládá změnu průměrné hodnoty proměnné v poli.

Anizotropie - lze ji popsat pomocí modelů jednotlivých směrových semivariogramů (tj. semivariogramů vypočtených na různých směrech v poli). Projevuje se změnami parametrů (dosahu, prahu, zbytkového rozptylu), jednak v rozdílech typů směrových semivariogramů. Rozlišujeme geometrickou a zonální anizotropii.