# SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

holcik@iba.muni.cz

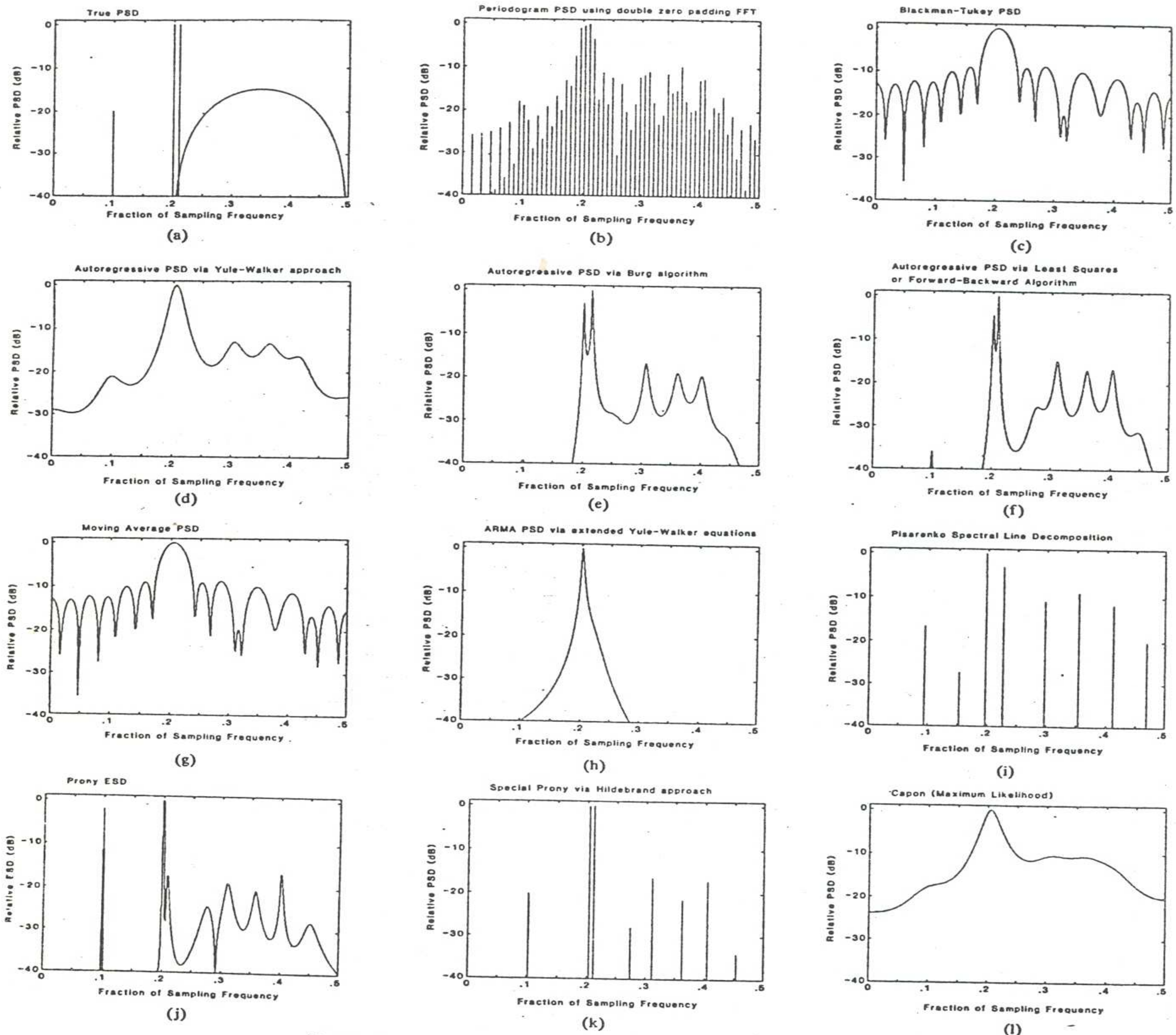
UKB, A29, RECETOX, dv.č.112

# KDY A JAK SE BUDEME POTKÁVAT?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **Únor** | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| | 27 | 28 | | | | | |
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **Březen** | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | | |
| | | | | | | 1 | 2 |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **Duben** | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **Květen** | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| | 29 | 30 | 31 | | | | |

# LITERATURA


- ☑ Holčík,J.: přednáškové prezentace
- ☑ Proakis,J.G., Rader,C.M., Ling,F., Nikias,C.L.: Advanced Digital Signal Processing. Macmillan Publ. Comp, New York 1992, 608s.
- ☑ Kay, S.M., Marple, S.L.: Spectrum Analysis - A Modern Perspective. Proc. IEEE, roč.69, č.11, Nov. 1981, s.1380-1418.
- ☑ Bloomfield,P.: Fourier Analysis of Time Series. An Introduction. J.Wiley&Sons, N.York 2000.



True PSD
Periodogram PSD using double zero padding FFT
Blackman-Tukey PSD
Autoregressive PSD via Yule-Walker approach
Autoregressive PSD via Burg algorithm
Autoregressive PSD via Least Squares or Forward-Backward Algorithm
Moving Average PSD
ARMA PSD via extended Yule-Walker equations
Pisarenko Spectral Line Decomposition
Prony ESD
Special Prony via Hildebrand approach
Capon (Maximum Likelihood)
Relative PSD (dB)
Relative ESD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
0
-10
-20
-30
-40
.1
.2
.3
.4
.5
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)

# CÍL NAŠEHO SETKÁVÁNÍ

- ☑ budou představeny různé algoritmy odhadu frekvenčního spektra časových řad, včetně okolností jejich použitelnosti;
- ☑ prakticky si ověříte jejich vlastnosti;
- ☑ budete mít představu jak se provádí harmonická analýza.

***Nevěřte všemu, co se vám k věření předkládá:***

***Zkoumejte vše a přesvědčujte se o všem sami!***

**Jan Amos Komenský (1592 - 1670)**

# I. CO UŽ UMÍME?

# ANALYZOVANÉ VELIČINY

## SIGNÁL

je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, **a jeho dynamice**.

## ČASOVÁ ŘADA (ČÍSLICOVÝ SIGNÁL)

je uspořádaná množina hodnot $\{y(t_i):i=1,\ldots\ \ldots,n\}$, kde hodnota $t_i$ určuje čas, kdy byla hodnota $y(t_i)$ určena.

## VZORKOVÁNÍ

vzorkovací teorém - $f_{vz} > 2f_{max}$

# PRO JISTOTU

$$x(t) = 4\cos(2\pi 10t + \pi/2) + 5\sin(2\pi 30t)$$

Jaká musí být minimální vzorkovací frekvence - $f_{vz}$?

a) větší než $40\pi$;

b) rovna $60\pi$;

c) větší než 60;

d) menší než $60\pi$?

# ČASOVÉ ŘADY – CO S NIMI?

ať se snažíme o co chceme, zpravidla se nevyhneme potřebě znát její **matematický model**

# ČASOVÉ ŘADY – CO S NIMI?

ať se snažíme o co chceme, zpravidla se nevyhneme potřebě znát její **matematický model**,

tj. matematický popis průběhu časové řady, resp. jejích částí

# ČASOVÉ ŘADY – CO S NIMI?

ať se snažíme o co chceme, zpravidla se nevyhneme potřebě znát její **matematický model**

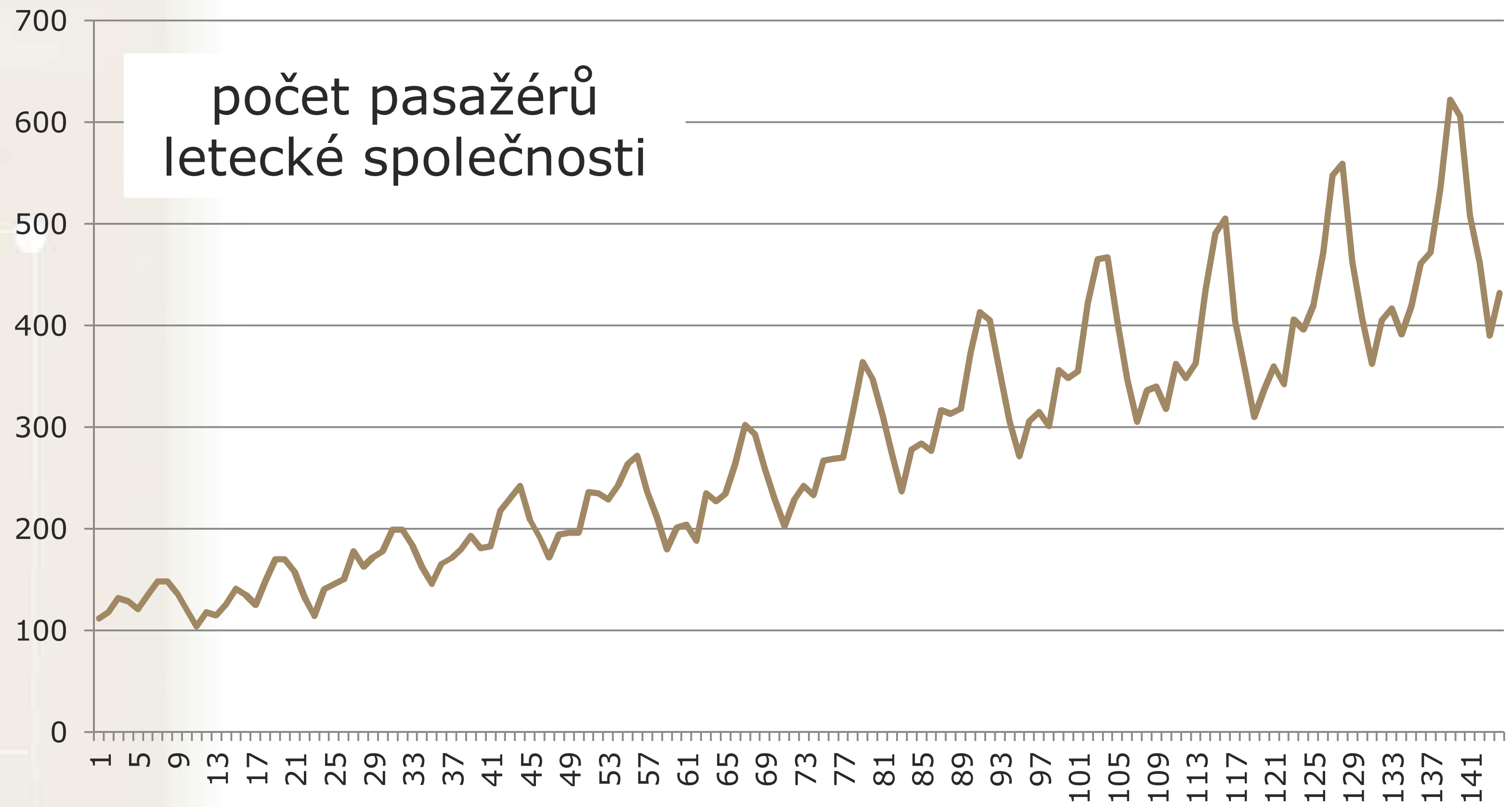
- posouzení kvality, tj. srovnání s tím, co považujeme za kvalitu (třeba nalezení a nahrazení odlehlých hodnot);
- separace systémové (užitečné) a nesystémové (neužitečné, parazitní) složky;
- posouzení okamžitého stavu generujícího objektu – monitorování;
- odhad hodnot mimo známý interval;
- ....

# ČASOVÉ ŘADY – CO S NIMI?

ať se snažíme o co chceme, zpravidla se nevyhneme potřebě znát její **matematický model**

chceme-li jej zkonstruovat, tak nejdříve potřebujeme znát vlastnosti časové řady (**analýza**) a potom přikročit k návrhu (**syntéza**)

# ANALÝZA ČASOVÉ ŘADY




**!** nestacionarita **!**

- trend
- cyklická složka - **?** multiplikativní model **?**

# ANALYZOVANÉ VELIČINY

- ☑ **primární oblast popisu** (prostor definovaný původními nezávislými proměnnými)– čas, prostorové souřadnice, pořadí
- ☑ **sekundární oblast popisu** – výsledkem transformace (zobrazení) z primární oblasti – vytváříme **obraz** (latinsky **spectrum**) původní veličiny

# FREKVENČNÍ SPEKTRUM

**Frekvenční spektrum** signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

**! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !**

# ČASOVÁ ŘADA

na vlastnosti popisu časové řady v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti časové řady v primární oblasti;
- transformační vztah

# ČASOVÁ ŘADA

na vlastnosti popisu časové řady v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti časové řady v primární oblasti;
- transformační vztah

**(je paráda, když je lineární!)**

# ČASOVÁ ŘADA

na vlastnosti popisu časové řady v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti časové řady v primární oblasti;
- transformační vztah

**(je paráda, když je lineární!)**

**Co to je, když je lineární?**

# INTEGRÁLNÍ LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

**spojitý funkce**

$$X(f) = \int_{O_a} x(t).a(f,t)dt$$

**časová řada (diskrétní signál)**

$$X(kF) = \sum_{O_d} x(nT_{vz}).a_{kn}$$

Je-li jádro transformace $a(f,t)=e^{-j2\pi ft}$, resp., $a_{kn} = e^{-j2\pi kFnT_{vz}}$, pak realizujeme rozklad signálu na jeho harmonické složky

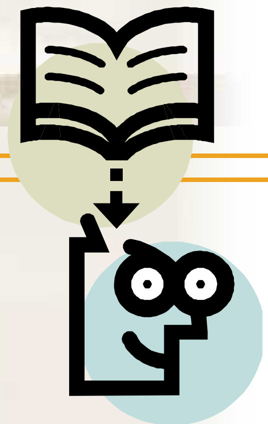
$$\Downarrow$$

**fourierovské spektrum**

# FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

jeho výpočet závisí na vlastnostech primárního popisu časové řady

# FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM



## ! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitá** **periodická** **funkce** má diskrétní frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitá** **jednorázová** **funkce** má spojité frekvenční spektrum– pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

## ! A VĚDĚT **PROČ** !

# FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

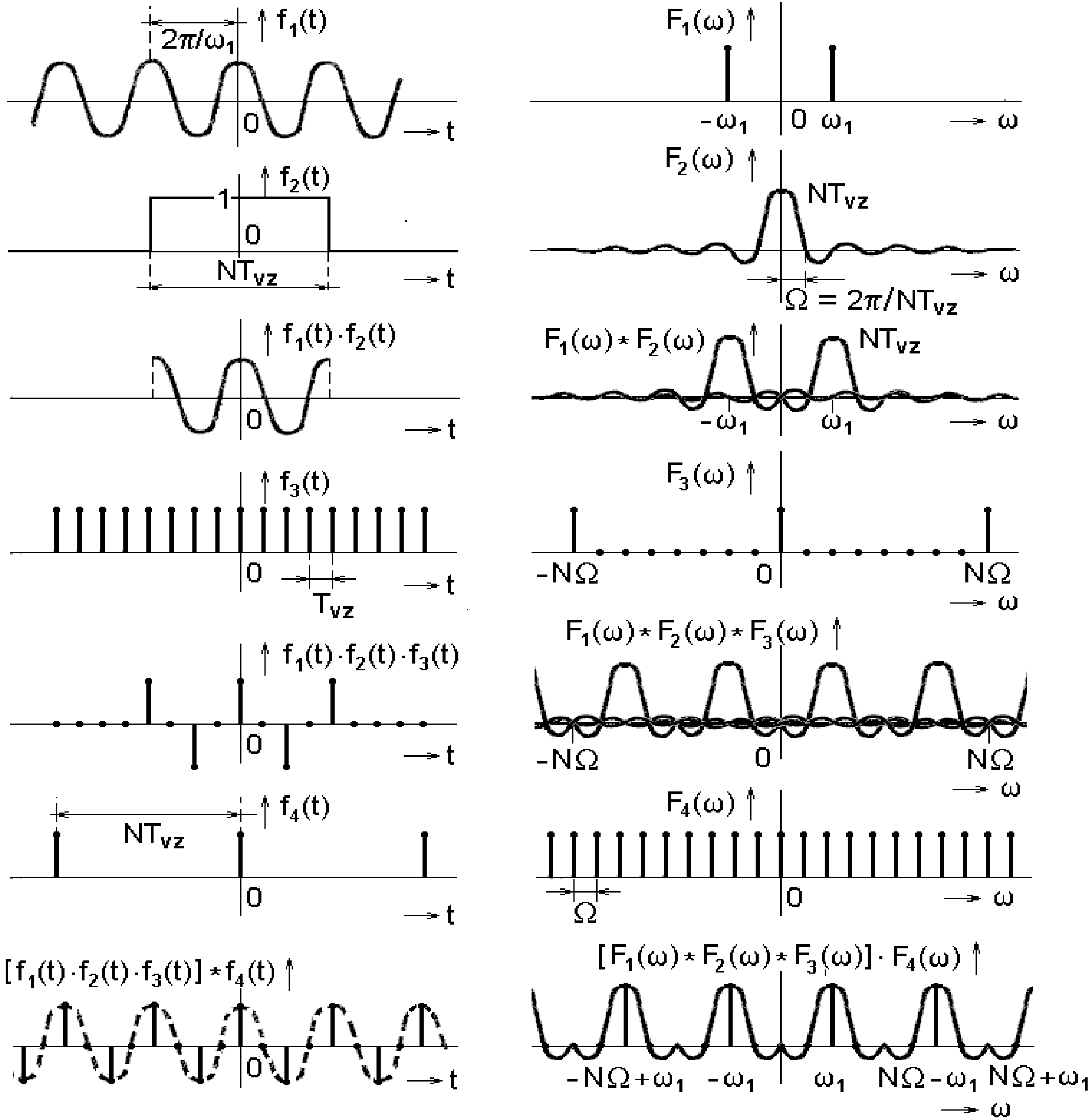
## ! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **(diskrétní)** **periodická** **posloupnost** má diskrétní frekvenční spektrum – diskrétní Fourierova řada (transformace);
- ☑ **(diskrétní)** **neperiodická v čase nekonečná** **posloupnost** má spojité frekvenční spektrum – Fourierova transformace s diskrétním časem;
- ☑ **(diskrétní)** **neperiodická v čase konečná** **posloupnost** má diskrétní frekvenční spektrum – diskrétní Fourierova transformace;
- ☑ a ve všech těchto **diskrétních** případech je spektrum **periodické**

**! A VĚDĚT PROČ !**

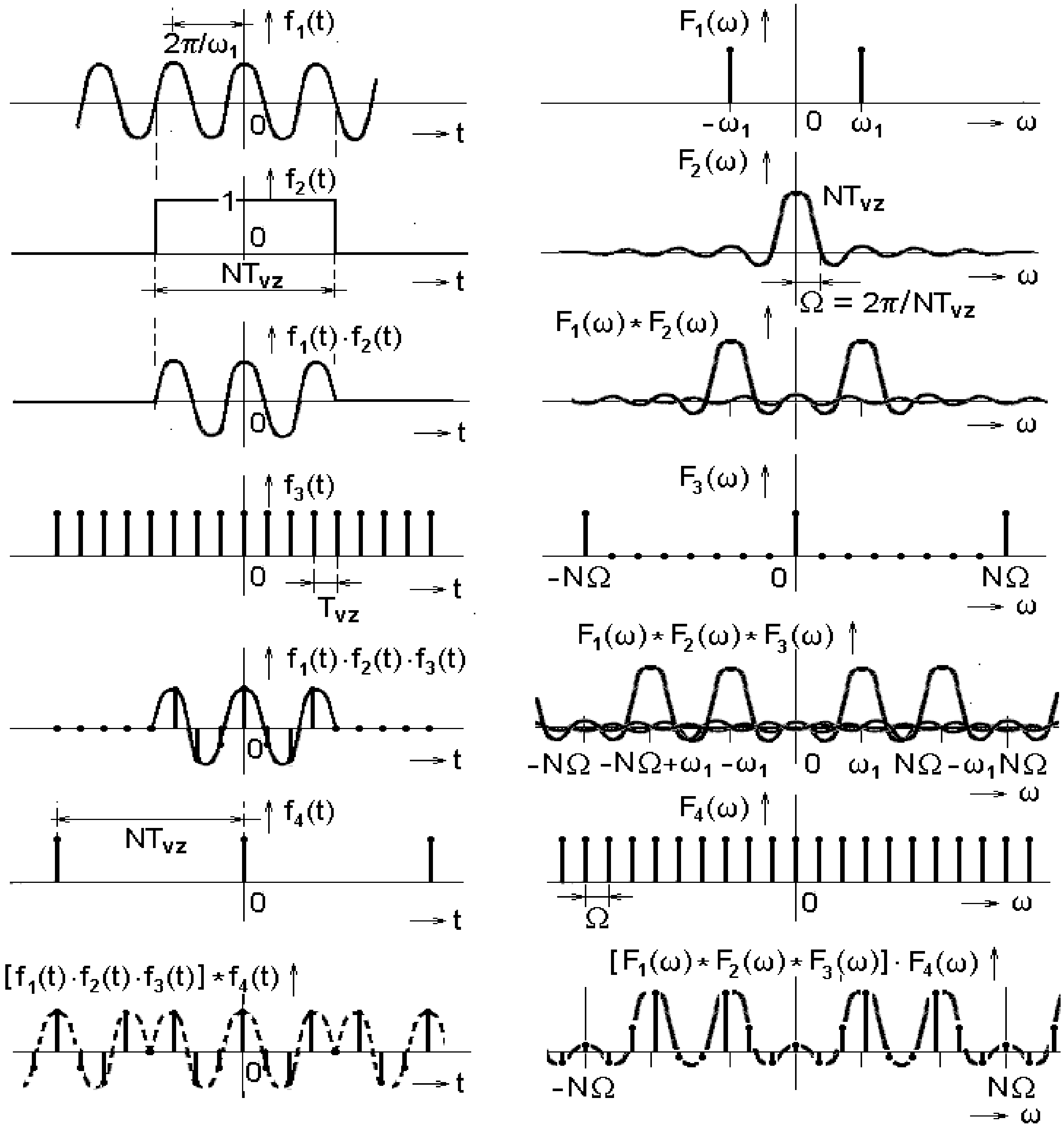
# DFT

$$\omega_1 = 2\Omega$$
$$= 4\pi/NT_{vz}$$



# DFT

$\omega_1 = 2{,}5\Omega$
$= 5\pi/NT_{VZ}$



# FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

## JAKÉ MÁME NÁSTROJE K JEHO VÝPOČTU?

# FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

## JAKÉ ZNÁME NÁSTROJE K JEHO VÝPOČTU?

Fourierova řada

Fourierova transformace

diskrétní Fourierova řada

Fourierova transformace s diskrétním časem

diskrétní Fourierova transformace

# PRO JISTOTU

Jaký je definiční vztah diskrétní Fourierovy transformace?

a) $$X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-j2\pi kn/N}$$

b) $$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).e^{-jn\omega T_{vz}},$$

$$\omega = 2\pi k/NT_{vz} \text{ pro } N \to \infty$$

c) $$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-jk\Omega t}dt$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

d) $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j2\pi kn/N}$$

# FOURIEROVA ŘADA

- ☑ každou periodickou funkci x(t+kT)=x(t), (která vyhovuje Dirichletovým podmínkám), můžeme rozložit ve Fourierovu řadu

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \qquad \Omega = 2\pi / T$$

kde $c_n$ jsou komplexní Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-jn\Omega t} dt$$

$\Omega$ – úhlový kmitočet základní harmonické složky (základní harmonická);

# FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-j\omega t} dt$$

**Fourierova transformace**

Funkci X(ω) nazveme spektrální funkcí signálu. Ta už nevyjadřuje skutečné zastoupení jednotlivých harmonických složek signálu, nýbrž jen jejich poměrné zastoupení.

Pro časovou funkci můžeme psát vztah

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega).e^{j\omega t}.d\omega$$

**zpětná Fourierova transformace**

# DISKRÉTNÍ FOURIEROVA ŘADA

- nechť $x(nT_{vz})$ je periodický posloupnost s periodou $NT_{vz}$; pak $x(nT_{vz})$ lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k . \exp \frac{j2\pi nk}{N}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kde

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) . \exp\left( - \frac{j2\pi kn}{N} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

# FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).\exp\left(-\frac{2j\pi knT_{vz}}{NT_{vz}}\right), \quad k = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$\Downarrow$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).\exp(-jn\omega T_{vz}), \qquad \omega = 2\pi k / NT_{vz}$$

kde $\omega$ je pro $N \to \infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

# DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-jk\Omega nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-jk\frac{2\pi}{NT_{vz}}nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j2\pi kn/N}$$

$$x(nT_{vz}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{jnT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{j2\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j2\pi kn/N}$$

# FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

jeho výpočet závisí na vlastnostech primárního popisu časové řady:

- časová řada- 1) periodická

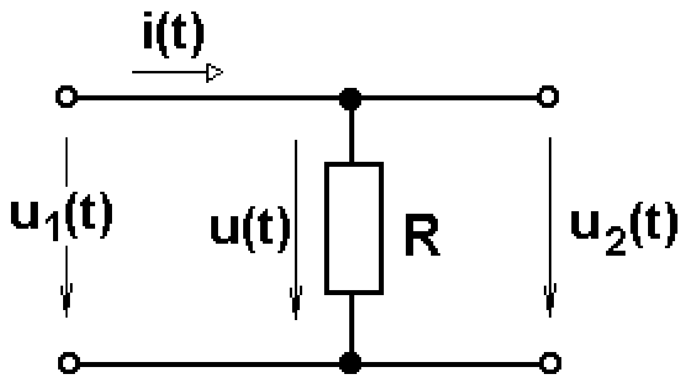
  2) neperiodická

  - s konečnou energií;
  - s nekonečnou energií

# ENERGIE

- okamžitá práce vykonaná na odporu R:

  $A(t) = u(t).i(t)$




- podle Ohmova zákona:

  $U = R.I,$

  a tedy můžeme po dosazení psát

  $$A(t) = R.i(t)\ .\ i(t) = R.i^2(t) = u(t).\ u(t)/R = u^2(t)/R.$$

  Když je R = 1 Ω je

  $$A(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

  a celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

  $$A = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt$$

# ENERGIE

- z té úvahy energie spojitého signálu s(t)

$$E_s = \int_T s^2(t)dt$$

- energie diskrétního signálu

$$E_d = \sum_n^N s^2(nT_{vz})$$

# VÝKON

- výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = E/T$$

$$P_s = \frac{1}{T}\int_T s^2(t)dt \qquad P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T s^2(t)dt$$

$$P_d = \frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N s^2(nT_{vz}) \qquad P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N s^2(n)$$

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N s^2(n)$$

# KORELAČNÍ FUNKCE

- vzájemná či křížová korelační funkce (cross-correlation function) dvou periodických signálů (funkcí) o téže periodě T je definována

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{T} x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

- popisuje podobnost průběhů obou signálů v závislosti na jejich posunutí
- je periodická s periodou T

# AUTOKORELAČNÍ FUNKCE

- výpočet korelační funkce má smysl i v případě, že jsou oba signály totožné – autokorelační funkce

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau)dt$$

# AUTOKORELAČNÍ FUNKCE

- vypočtená autokorelační funkce je:
  - sudá;
  - je-li funkce periodická s periodou T, je periodická s toutéž periodou i její autokorelační funkce;
  - R(0) je rovno kvadrátu efektivní hodnoty signálu;
  - $\forall \tau \in \mathbb{R}$: $R(0) \geq R(\tau)$.
- tyto čtyři vlastnosti mají autokorelační funkce všech periodických signálů.

# KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ **korelační funkce** $R(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku $t_1$ a hodnotami náhodného procesu v okamžiku $t_2$. Může být spočítána pomocí vztahu

$$R(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1.x_2p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- ☑ **kovarianční funkce** (covariance function) $K(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku $t_1$ od $m(t_1)$ a odchylkami náhodného procesu v okamžiku $t_2$ od $m(t_2)$. Může být spočítána pomocí vztahu

$$K(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-m(t_1)].[x_2-m(t_2)]p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

# KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ tyto poměrně obecné vztahy se mohou zjednodušit, pokud se zjednoduší vlastnosti náhodných procesů

$$\Downarrow$$

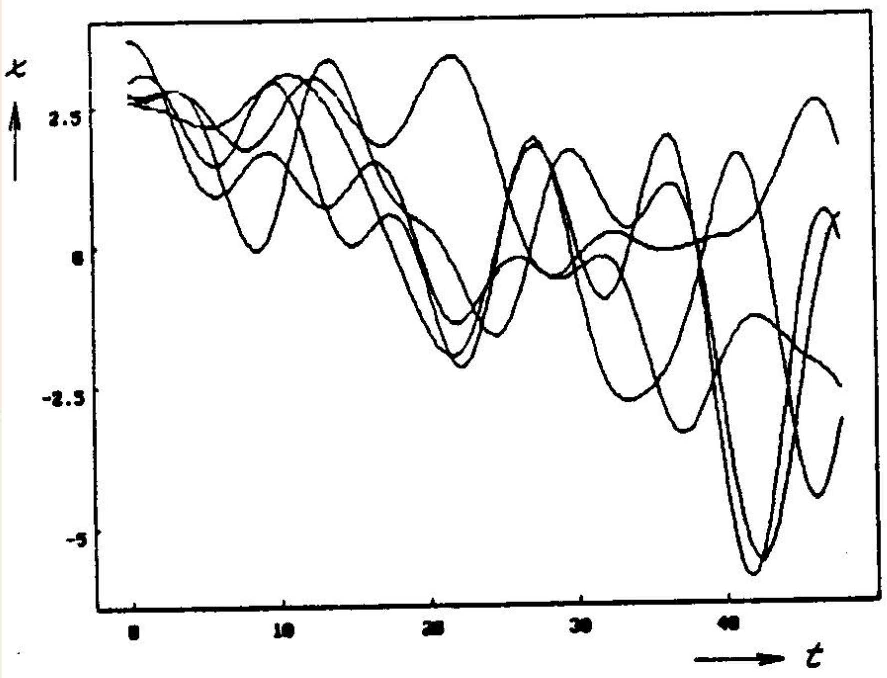
**stacionarita**

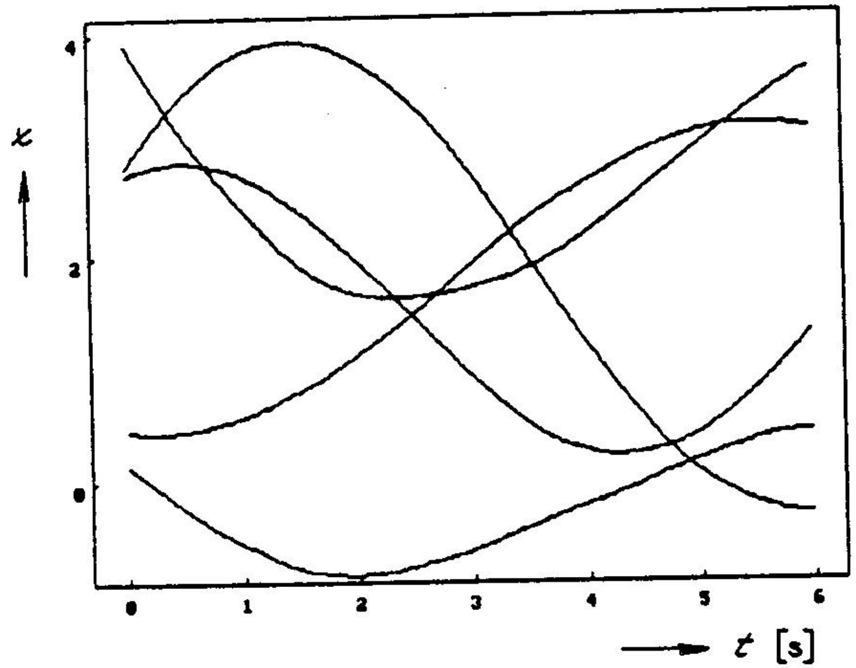
**ergodicita**

# STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

## zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (stationary random process) je proces s v čase stálým chováním



# STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

## přesněji:

- **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky $t_1$ a $t_2$)

  v tom případě, tj. s $\tau = t_2 - t_1$, můžeme funkce $p(x_1,x_2,t_1,t_2)$, $R(t_1,t_2)$ a $K(t_1,t_2)$ nahradit funkcemi $p(x_1,x_2,\tau)$, $R(\tau)$ a $K(\tau)$

**stacionarita**

- v užším slova smyslu
- v širším slova smyslu (stálé momenty 1. a 2. řádu)

# ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

**Ergodický náhodný proces** (ergodic random process) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace

- ☑ aritmetický průměr

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x(t_i)$$

nebo

$$\hat{m} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)dt$$

Odhad bude tím věrohodnější, čím bude úsek T delší.

# ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- disperze

$$\hat{D} = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m]^2 dt$$

- autokorelační funkce

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt$$

- křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy ξ(t) a η(t) s realizacemi x(t) a y(t)

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t-\tau)dt\right)$$

# ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy ξ(t) a η(t) s realizacemi x(t) a y(t)

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)x_2(t+\tau)dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)x_2(t-\tau)dt\right)$$

- pro diskrétní případ

$$\hat{R}_{xy}(nT_{vz}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x_1(mT_{vz})x_2(mT_{vz} + nT_{vz}) =$$

$$= \left(\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x_1(mT_{vz})x_2(mT_{vz} - nT_{vz})\right)$$