



# SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz)

© Institut biostatistiky a analýz

# VI. PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

# PARAMETRICKÉ METODY

- ☑ extrapolují hodnoty autokorelační funkce pro  $m \geq N$  (k tomu je potřeba apriorní informace o analyzované časové řadě)



parametrický model vzniku časové řady a z toho už cokoliv

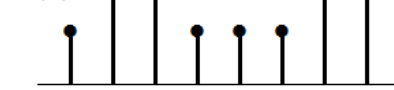
tedy: netrápí nás okna, ani prosakování spekter  $\Rightarrow$  lepší rozlišovací schopnost i při krátkých záznamech  $\Rightarrow$  **analýza časově proměnných a přechodných dějů**

# DISKRÉTNÍ KORELACE - OPAKOVÁNÍ

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



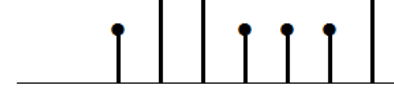
$n$

**a)**

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$

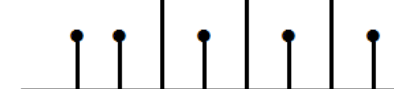
$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



$n$

**b)**

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$

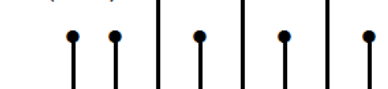
$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



$n$

**c)**

$$\tilde{r}_{xx1}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$\tilde{r}_{xx2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$$

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k y((n-k)T_{vz}) + \sum_{k=1}^q b_k x((n-k)T_{vz})$$

# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ je-li posloupnost  $x(nT)$ , resp.  $y(nT)$  realizací stacionárního náhodného procesu, platí pro jejich spektrální výkonové hustoty  $\Gamma_{xx}(f)$ , resp.  $\Gamma_{yy}(f)$ ,

$$\Gamma_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot \Gamma_{xx}(f),$$

kde  $|H(f)|$  je modul frekvenční charakteristiky použité lineární soustavy.

# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

Je-li  $x(nT_{vz})$  bílý šum s nulovou střední hodnotou, pak jeho autokorelační funkce

$$\gamma_{xx}(mT_{vz}) = \begin{cases} \sigma_x^2 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \Gamma_{xx}(f) = \sigma_x^2$$

$\sigma_x^2$  je rozptyl posloupnosti  $x(nT_{vz})$ , tj.  $\sigma_x^2 = E[x^2(nT_{vz})]$  a pro spektrální hustotu výkonu výstupní posloupnosti platí

$$\Gamma_{yy}(f) = \sigma_x^2 \cdot |H(f)|^2 = \sigma_x^2 \cdot \frac{|Y(f)|^2}{|X(f)|^2}$$

# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- Algoritmy parametrického odhadu výkonového spektra posloupnosti  $y(nT_{vz})$ ,  $n \in \langle 0, N-1 \rangle$  obsahují:
- 1) odhad parametrů modelu přenosové soustavy;
  - 2) výpočet spektrální hustoty výkonu  $\Gamma_{yy}(f)$  z odhadnutých parametrů



# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ podle charakteru modelu přenosové soustavy dělíme algoritmy na:
  - ARMA(p,q) – autoregressive-moving average řádu (p,q);
  - AR(p), q=0,  $b_0=1$ ,  $H(z)=1/X(z)$  ...  
... autoregresivní
  - MA(q),  $X(z) = 1 \Rightarrow H(z) = Y(z)$  ...  
moving average

# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ nejčastěji používaný AR model – proč?
  - vhodný pro vyjádření spektra s úzkými vrcholy (rezonance)
  - výpočet parametrů vede na jednoduchou soustavu lineárních rovnic
  - Lacoss (1971) – (platí pro všechny AR modely):
    - ☐ spektrální vrcholy odhadu spektra harmonických posloupností pomocí AR modelu jsou úměrné čtverci výkonu harmonických posloupností;
    - ☐ plocha vrcholu výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonické posloupnosti

# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ dekompoziční teorém (Wold 1938)
  - jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR modelem max.  $\infty$  řádu;
  - jakýkoliv ARMA nebo AR proces lze reprezentovat MA modelem max.  $\infty$  řádu;



je nám jedno, co použijeme za model, jen by měl mít co nejméně parametrů, které se snadno počítají

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

**ARMA:** 
$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^q b_k x(nT_{vz} - kT_{vz}) \quad |y(nT_{vz} - mT_{vz}), E$$

$$E[y(nT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] = -\sum_{k=1}^p a_k E[y(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] + \sum_{k=0}^q b_k E[x(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})]$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^q b_k \gamma_{xy}(mT_{vz} - kT_{vz})$$

$\gamma_{xy}(mT_{vz})$  ... vzájemná korelační posloupnost mezi  $x(nT_{vz})$  a  $y(nT_{vz})$

$$\gamma_{xy}(mT_{vz}) = E[y(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})x(nT_{vz} - kT_{vz}).x(nT_{vz} + mT_{vz})\right] =$$

předpokládáme kauzální filtr

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})E[x(nT_{vz}).x(nT_{vz} + mT_{vz} + kT_{vz})] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})\gamma_{xx}(mT_{vz} + kT_{vz}) =$$

$$= h(-mT_{vz}).\sigma_x^2 = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ \sigma_x^2.h(-mT_{vz}) & m \leq 0 \end{cases}$$

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

## ARMA (pokračování):

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \cdot \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \cdot \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(kT_{vz}) \cdot b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

nelineární vztah mezi  $\gamma_{yy}(mT_{vz})$  a parametry  $a_k$  a  $b_k$

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

## ARMA (pokračování):

Ize rozdělit na lineární vztah pro určení parametrů  $a_k$ ,  $m > q$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(q) & \gamma_{yy}(q-1) & \cdots & \gamma_{yy}(q-p+1) \\ \gamma_{yy}(q+1) & \gamma_{yy}(q) & \cdots & \gamma_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(q+p-1) & \gamma_{yy}(q+p-2) & \cdots & \gamma_{yy}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(q+1) \\ \gamma_{yy}(q+2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(q+p) \end{bmatrix}$$

a nelineární vztah pro  $0 \leq m \leq q$

jiná interpretace:

hodnoty autokorelační posloupnosti  $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ ,  $m > q$  jsou jednoznačně určeny koeficienty charakteristického polynomu

$a_k$  a hodnotami  $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ ,  $0 \leq m \leq p$

z toho plyne, že lineární model automaticky definuje hodnoty autokorelační posloupnosti  $\gamma_{yy}(mT_{vz})$  pro  $m > q$

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

**AR:**

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \cdot \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > 0, (q = 0) \\ -\sum_{k=1}^p a_k \cdot \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 & m = 0, (0 \leq m \leq q, q = 0) \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

**AR:**

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(-1) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+1) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(p-1) & \gamma_{yy}(p-2) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{yy}(0) + \sum_{k=1}^p a_k \cdot \gamma_{yy}(-kT_{vz})$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(-1) & \cdots & \gamma_{yy}(-p) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(p) & \gamma_{yy}(p-1) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Yule-  
Walkerovy  
rovnice**



# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

**MA:**

$$h(k) = b_k \quad 0 \leq k \leq q \quad a_k = 0 \quad 1 \leq k \leq p$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} 0 & m > q \\ \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k \cdot b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

# AR MODELY

## Yule – Walkerova metoda

výpočet odhadu autokorelace ze signálové posloupnosti  $y(nT_{vz})$  a pomocí tohoto odhadu odhad parametrů  $\tilde{a}_k$  AR modelu

užitečnosti:

- 1) odhad AKF
- 2) řešení Yule-Walkerových rovnice;
- 3) odhad výkonové spektrální hustoty

# GEORGE UDNY YULE, FRS

\* 18.2.1871, Morham, Skotsko, U.K.

† 26.6. 1951 Cambridge, Anglie, U.K.

britský statistik, pocházel z uznávané skotské rodiny vědců, důstojníků, úředníků a správců. Jeho strýc byl orientalista Sir Henry Yule (1820-1889)

zájmy: teorie a aplikace korelace, regrese především ve spojení s časovými řadami



Frank Yates v jeho nekrologu uvedl: "To summarize we may, I think, justly conclude that though Yule did not fully develop any completely new branches of statistical theory, he took the first steps in many directions which were later to prove fruitful lines for further progress... He can indeed rightly claim to be one of the pioneers of modern statistics".

# SIR GILBERT THOMAS WALKER

\* 14.6.1868 Rochdale, Lancashire, Anglie

† 4.11.1958 Coulsdon, Surrey, Anglie

přední britský matematik, fyzik a meteorolog

## **Walker Institute for Climate System Research**

znám především popisem tzv. jižních oscilací, klimatického jevu způsobeného mořským proudem El Niño



He was a very normal human being, with none of the proverbial eccentricities of mathematicians among whom he ranked high. This normality itself is perhaps a great and likable distinction (Sohoni, 1959)

# AR MODELY

## Yule – Walkerova metoda

ad 1)

$$\hat{r}_{xx}(mT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} - mT_{vz})$$

⇒ autokorelační matice je pozitivně semidefinitní

⇒ výsledný AR model bude stabilní

⇒ předpokládá se, že stabilní AR model reprezentuje data **nejlépe (!?)**

# AR MODELY

## Yule – Walkerova metoda

ad 3)

$$\hat{P}_{xx}^{YW}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{xp}^2 T_{vz}}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k) \cdot e^{-j2\pi f k T_{vz}} \right|^2}$$

$$\hat{\sigma}_{xp}^2 = r_{xx}(0) \cdot \prod_{k=1}^p \left[ 1 - |\hat{a}_k(k)|^2 \right] = \hat{E}_p^f$$

je odhad minimální střední kvadratické odchylky prediktoru p-tého řádu

# AR MODELY

## Yule – Walkerova metoda

ad 2) řešení Yule-Walkerových rovnic

## LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

# NORMAN LEVINSON

\* 11.8.1912 Lynn, MA, USA -

† 10.10.1975 Boston, MA, USA

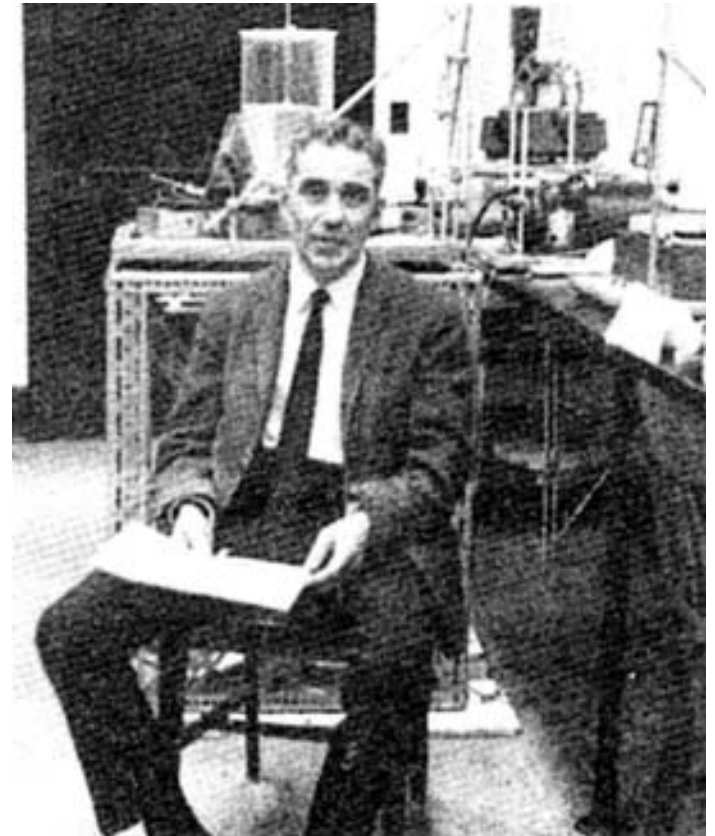
americký elektrotechnik a matematik

zájmy: Fourierova transformace,  
komplexní analýza, nelineární  
diferenciální rovnice, teorie čísel,  
zpracování signálů, Levinsonův  
algoritmus (1947)

studia: M.I.T., Master degree in E.E.  
(1934), PhD stipendium – Cambridge,  
PhD degree M.I.T. - matematika

zaměstnán: M.I.T.

učitel a spolupracovník: N. Wiener





# JAMES DURBIN

\* 30.6.1923, Widnes, Anglie, U.K. - †  
23.6.2012 Londýn, U.K.

- britský statistik, ekonometrik

studium: St John's College Cambridge

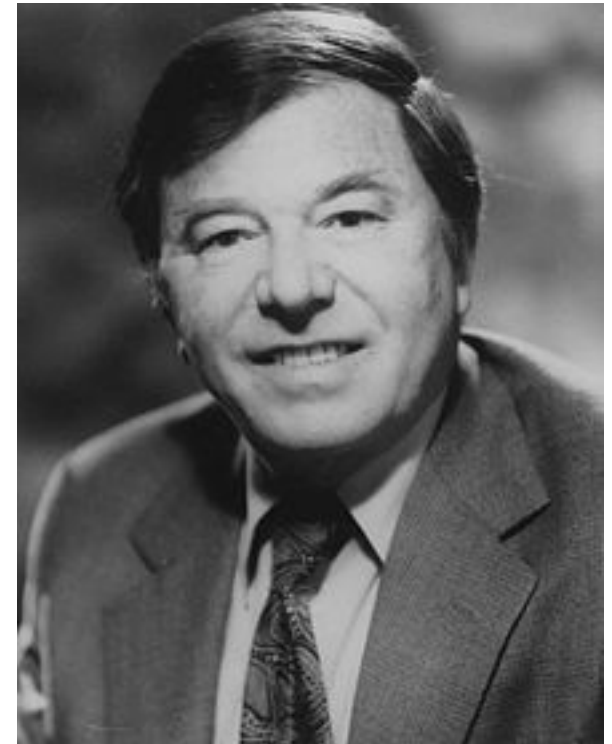
(spolužák David Cox), učitel Sir  
Maurice Kendall (Kendalův  
korelační koeficient

$$KTRCC = \frac{C - D}{C + D}$$

C je počet shodných párů a D je počet  
neshodných párů)

zaměstnání: London School of Economics (1950-1988)

zájmy: analýza časových řad, korelace časových řad, vylepšil  
Levinsonův algoritmus (1960)



# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

efektivní rekurzivní algoritmus výpočtu koeficientů  $a_k$ ,  $k=1, \dots, p$  z Y.-W. rovnic využívající skutečnosti, že autokorelační matice má vlastnosti Toeplitcovy matice ( $T(i,j)=t(i-j)$ )

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{pmatrix}$$

pracnost L.-D. algoritmu je  $\mathcal{O}(p^2)$

pracnost Gaussovy eliminační metody je  $\mathcal{O}(p^3)$

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

dopředná lineární predikce

normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = 0 \quad l=1,2,\dots,p; \quad a_p(0)=1$$

výsledná minimální MSE

$$E_p^f = \gamma_{yy}(0) + \sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{yy}(-kT_{vz})$$

rozšířené normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = \begin{cases} E_p^f & l=0 \\ 0 & l=1,2,\dots,p \end{cases}$$

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

- ✓ výpočet je rekurzivní, vychází z řešení systému 1. řádu a výsledky pro systém i-tého řádu se odvozují z řešení (i-1). řádu

## system 1. řádu

**p=1**

$$a_1(0) \cdot \gamma_{yy}(1) + a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(0) = 0 \Rightarrow \left|_{a_1(0)=1} a_1(1) = -\frac{\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0)}\right.$$

$$E_1^f = \gamma_{yy}(0) + a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(-1) = \gamma_{yy}(0) - \frac{\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0)} \cdot \gamma_{yy}(-1) =$$

$$= \gamma_{yy}(0) - \frac{|\gamma_{yy}(1)|^2}{\gamma_{yy}^2(0)} \cdot \gamma_{yy}(0) = \gamma_{yy}(0) \cdot [1 - |a_1(1)|^2]$$

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

## system 2. řádu

**p=2** [ hledáme  $a_2(1)$  a  $a_2(2)$ ,  $a_2(0)=1$  ]

$$a_2(0) \cdot \gamma_{yy}(1) + a_2(1) \cdot \gamma_{yy}(0) + a_2(2) \cdot \gamma_{yy}(-1) = 0 \quad l = 1$$

$$a_2(0) \cdot \gamma_{yy}(2) + a_2(1) \cdot \gamma_{yy}(1) + a_2(2) \cdot \gamma_{yy}(0) = 0 \quad l = 2 = p$$

$$a_2(0) = 1$$

$$a_2(1) \cdot \gamma_{yy}(0) + a_2(2) \cdot \gamma_{yy}(-1) = -\gamma_{yy}(1)$$

$$a_2(1) \cdot \gamma_{yy}(1) + a_2(2) \cdot \gamma_{yy}(0) = -\gamma_{yy}(2)$$

$$\gamma_{yy}(1) = -a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(0)$$

$$a_2(1) \cdot \gamma_{yy}(0) - a_2(2) \cdot a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(0) = a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(0)$$

$$a_2(1) = a_1(1) + a_1(1) \cdot a_2(2)$$

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

## system 2. řádu (pokračování)

$p=2$

$$\gamma_{yy}(1) = -a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(0)$$

$$a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(1) + a_1(1) \cdot a_2(2) \cdot \gamma_{yy}(1) + a_2(2) \cdot \gamma_{yy}(0) = -\gamma_{yy}(2)$$

$$a_2(2) \cdot [\gamma_{yy}(0) - a_1^2(1) \cdot \gamma_{yy}(0)] = -\gamma_{yy}(2) - a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(1)$$

$$a_2(2) = -\frac{\gamma_{yy}(2) + a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0) - a_1^2(1) \cdot \gamma_{yy}(0)} = -\frac{\gamma_{yy}(2) + a_1(1) \cdot \gamma_{yy}(1)}{E_1^f}$$

$\sigma_{k-1}^2$

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

**obecně:**

$$a_k(k) = \frac{-\gamma_{yy}(k) + \sum_{r=1}^{k-1} a_{k-1}(r) \cdot \gamma_{yy}(k-r)}{E_{k-1}^f}$$

$$a_k(i) = a_{k-1}(i) + a_{k-1}(k-i) \cdot a_k(k)$$

$$E_k^f = \sigma_k^2 = [1 - a_k^2(k)] \cdot \sigma_{k-1}^2$$

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

## poznámky + užitečnosti + zajímavosti

☑ L.-D. algoritmus poskytuje odhad parametrů AR systému nejen pro požadovaný řád, nýbrž i pro všechny nižší řády;

☑ jak se správný řád pozná:

$\sigma_k^2 = E_k^f$  se v další iteraci přestane zmenšovat, resp.  
 $a_{p+1}(k) = a_p(k)$  pro  $k=1,2,\dots,p$  a tím  $a_{p+1}(p+1) = 0$

obecně pro proces AR(p)  $a_k(k) = 0$  a  $\sigma_k^2 = \sigma_p^2$  pro  $k > p$



# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

## poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- ☑ parametry  $\{a_1(1), a_2(2), \dots, a_p(p)\}$  se často nazývají koeficienty reflexe  $K_k$  (název souvisí s realizací predikčních algoritmů mřížkovou strukturou);

pokud  $\{\gamma_{yy}(0), \gamma_{yy}(1), \dots, \gamma_{yy}(p)\}$  je skutečná autokorelační posloupnost, tj. AK matice je pozitivně semidefinitní, pak

$$|a_k(k)| = |K(k)| \leq 1 \text{ pro } k=1, 2, \dots, p;$$

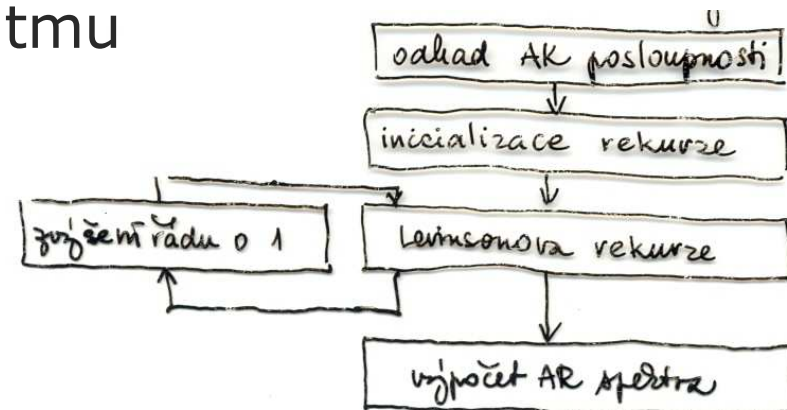
důsledky:

- $\sigma_{k+1}^2 \leq \sigma_k^2$ , to znamená, že  $\sigma_k^2$  dosáhne minima právě při správném řádu;
- nutnou a postačující podmínkou, aby póly  $X(z)$  ležely uvnitř nebo na jednotkové kružnici v rovině  $z$  je  $|K(k)| \leq 1$  pro  $k=1, 2, \dots, p \Rightarrow$  AR systém je stabilní;
- je-li  $|K(k)| = 1$  pro některé  $k$ , pak je třeba rekurzi ukončit, protože  $\sigma_k^2 = 0 \dots$  v tom případě je proces ryze harmonický

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

## poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- ✓ pokud by byl L.-D. algoritmus implementován pomocí paralelního procesoru s optimálním počtem jednotek, je pracnost algoritmu  $O(p \cdot \log_2 p)$ ;
- ✓ při odhadu výkonového spektra harmonických posloupností pomocí AR modelu jsou spektrální vrcholy AR spektra úměrné čtverci výkonu harmonických posloupností;
- ✓ plocha pod spektrálními vrcholy výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonické posloupnosti;
- ✓ blokové schéma L.-D. algoritmu



# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

## poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- ✓ pokud by byl L.-D. algoritmus implementován pomocí paralelního procesoru s optimálním počtem jednotek, je pracnost algoritmu  $O(p \cdot \log_2 p)$ ;
- ✓ při odhadu výkonového spektra harmonických posloupností pomocí AR modelu jsou spektrální vrcholy AR spektra úměrné čtverci výkonu harmonických posloupností;
- ✓ plocha pod spektrálními vrcholy výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonické posloupnosti;
- ✓ blokové schéma L.-D. algoritmu



**A JE TO!**

