



SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

VI. SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA POMOCÍ METODY VLASTNÍCH ČÍSEL

ZAČÍNÁME

AR(p) proces znehodnocený aditivním bílým šumem \equiv ARMA(p,p) proces;

ted' bude ... periodický signál + bílý šum

$$x(nT_{vz}) = 2 \cdot \cos(2\pi f_k T_{vz}) \cdot x(nT_{vz} - T_{vz}) - x(nT_{vz} - 2T_{vz})$$

tento systém generuje posloupnost

$$x(nT_{vz}) = 2 \cdot \cos(2\pi f_k nT_{vz}) \text{ pro } n \geq 0$$

pokud jsou počáteční podmínky $x(-1) = -1$ a $x(-2) = 0$

ZAČÍNÁME

obecně, posloupnost skládající se z p harmonických složek splňuje diferenční rovnici

$$x(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad (\text{☯})$$

což odpovídá systému s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m}} \quad (\text{☠})$$

(Polynom $A(z) = 1 + \sum a_m z^{-m}$ má $2p$ kořenů na jednotkovém kruhu v místech, která odpovídají frekvencím harmonické posloupnosti.)

PRINCIP

- ☑ přepokládejme periodickou posloupnost + bílý šum $w(nT)$
 $\{E(|w(nT_{vz})|^2) = \sigma_w^2\}$

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + w(nT_{vz})$$

po dosazení za $x(nT)$ z tohoto vztahu do (☯) máme

$$y(nT_{vz}) - w(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m [y(nT_{vz} - mT_{vz}) - w(nT_{vz} - mT_{vz})]$$

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y(nT_{vz} - mT_{vz}) = \sum_{m=0}^{2p} a_m w(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad a_0 \equiv 1$$

což představuje ARMA proces s identickými AR i MA parametry

$$\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{a} \quad (\text{🐶})$$

$$\mathbf{y}^T = [y(nT_{vz}), y(nT_{vz} - T_{vz}), \dots, y(nT_{vz} - 2pT_{vz})],$$

$$\mathbf{w}^T = [w(nT_{vz}), w(nT_{vz} - T_{vz}), \dots, w(nT_{vz} - 2pT_{vz})],$$

$$\mathbf{a}^T = [1, a_1, \dots, a_{2p-1}, a_{2p}],$$

PRINCIP

- ☑ vynásobením obou stran () vektorem \mathbf{y} a určením střední hodnoty

$$E(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T) \cdot \mathbf{a} = E(\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}^T) \cdot \mathbf{a} = E((\mathbf{x} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}^T) \cdot \mathbf{a}$$

$$\Gamma_{yy} \cdot \mathbf{a} = 0 + \sigma_w^2 \cdot \mathbf{a}$$

$(\Gamma_{yy} - \sigma_w^2 \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a} = 0$... vlastní (charakteristická) rovnice

σ_w^2 je vlastní číslo autokorelační matice Γ_{yy} ;

\mathbf{a} je vlastní vektor Γ_{yy} spojený s vlastním číslem σ_w^2 ;

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

Mějme p náhodně fázově posunutých harmonických posloupností s aditivním bílým šumem.

Hodnoty autokorelační funkce jsou

$$\gamma_{yy}(0) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^p P_i$$

$$\gamma_{yy}(k) = \sum_{i=1}^p P_i \cdot \cos 2\pi f_i k T_{vz}, \quad k \neq 0; \quad P_i = A_i^2 / 2 \text{ je}$$

průměrný výkon i -té sinusovky, A_i je její amplituda

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

☑ maticově

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 T_{vz} & \cos 2\pi f_2 T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p T_{vz} \\ \cos 2\pi f_1 2T_{vz} & \cos 2\pi f_2 2T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p 2T_{vz} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos 2\pi f_1 p T_{vz} & \cos 2\pi f_2 p T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p p T_{vz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

☑ známe-li frekvence f_i , $1 \leq i \leq p$, můžeme spočítat výkon jednotlivých harmonických složek, místo hodnot $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ použijeme odhady $r_{yy}(mT_{vz})$, známe-li výkony, určíme rozptyl šumu

$$\sigma_w^2 = r_{yy}(0) - \sum_{i=1}^p P_i$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

podle Pisarenka platí pro ARMA proces obsahující p harmonických složek v aditivním bílém šumu, že rozptyl σ_w^2 odpovídá minimálnímu vlastnímu číslu autokorelační matice, pokud je rozměr autokorelační matice větší nebo roven $(2p+1) \times (2p+1)$.

Potom požadovaný vektor koeficientů ARMA modelu je dán vlastním vektorem náležejícím minimálnímu vlastnímu číslu.

Frekvence f_i , $i=1, \dots, p$ se určí řešením rovnice, dané položením jmenovatele ve vztahu (✂) rovno nule, kde koeficienty a_m jsou určeny vlastním vektorem spojeným s minimálním vlastním číslem.

VLADIMIR FEDOROVICH PISARENKO

?

Ph.D.

Moskevská státní univerzita 1963

disertační práce:

Matematická klasifikace objektů

obor: Teorie pravděpodobnosti a
stochastické procesy

školitel: Roland Lvovich Dobrushin

Pisarenko, V. F. *The retrieval of harmonics from a covariance function* Geophysics, J. Roy. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347-366, 1973.



PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

Předpokládejme hodnoty AKF $\gamma_{yy}(0)=3$, $\gamma_{yy}(1)=1$ a $\gamma_{yy}(2)=0$. Proces obsahuje jeden harmonickou posloupnost v bílém šumu. Určete její frekvenci, výkon a rozptyl, tj. výkon šumu.

Řešení:

autokorelační matice je

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

její minimální vlastní číslo je rovno nejmenšímu kořenu charakteristického polynomu

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_w^2 = \lambda_{\min} = 3 - \sqrt{2}$$

odpovídající charakteristický vektor má složky $a_0=1$, a_1 , a_2 , pro které platí

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

řešením získáme $a_1 = -\sqrt{2}$ a $a_2 = 1$

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |z_1| = |z_2| = 1, \quad \text{tj. leží na jednotkové kružnici}$$

$$z_1 = e^{j2\pi f_1 T_{vz}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_1 \cdot T_{vz} = 1/8$$

výkon $P_1 \cdot \cos(2\pi f_1 T_{vz}) = \gamma_{yy}(1) = 1 \Rightarrow P_1 = \sqrt{2}$,

proto

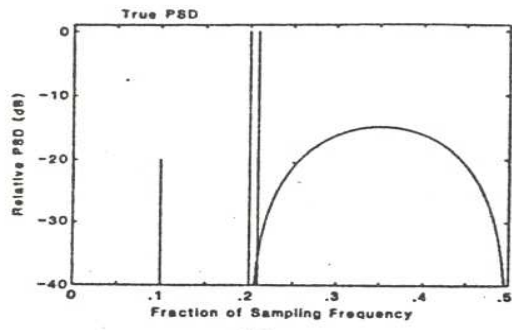
$$A = \sqrt{2P_1} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}$$

kontrola: $\sigma_w^2 = \gamma_{yy}(0) - P_1 = 3 - \sqrt{2}$, což souhlasí s λ_{\min} .

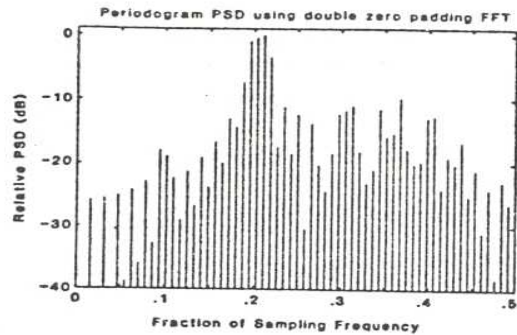
PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

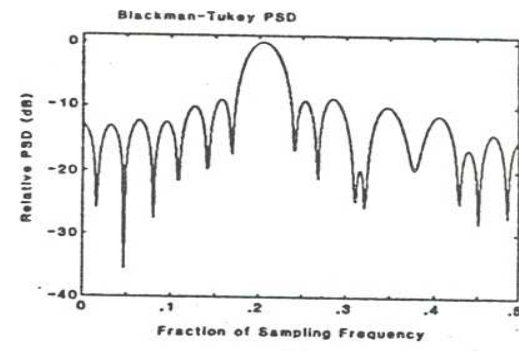
- ☑ zbývá určit frekvence f_i , $1 \leq i \leq p$, - to vyžaduje znalost vlastního vektoru \mathbf{a} pro vlastní číslo σ_w^2 ;
- ☑ protože jsme si již uvedli, že:
pro ARMA proces skládající se z p sinusovek v aditivním bílém šumu je rozptyl σ_w^2 roven nejmenšímu vlastnímu číslu matice Γ_{yy} za předpokladu, že rozměr $\Gamma_{yy} \geq (2p+1) \times (2p+1)$ požadovaný vektor koeficientů ARMA systému je dán hodnotami vlastního vektoru odpovídajícímu nejmenšímu vlastnímu číslu - frekvence f_i , $1 \leq i \leq p$, pak odpovídají kořenům polynomu, jehož koeficienty



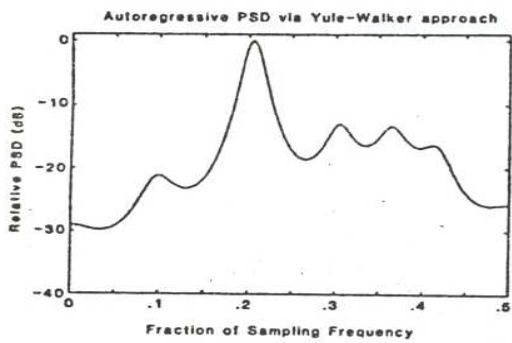
(a)



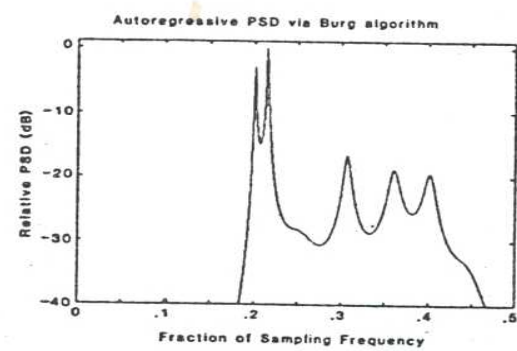
(b)



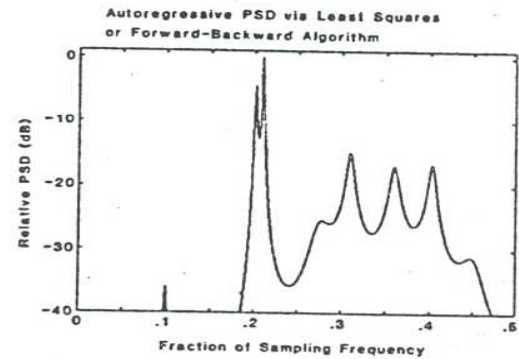
(c)



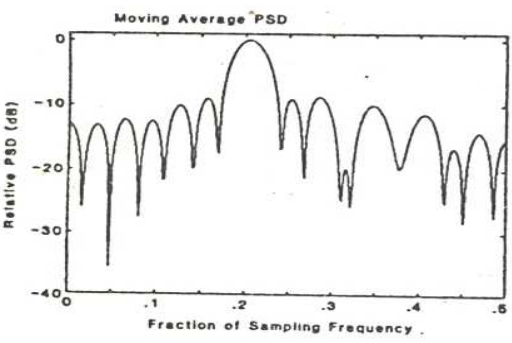
(d)



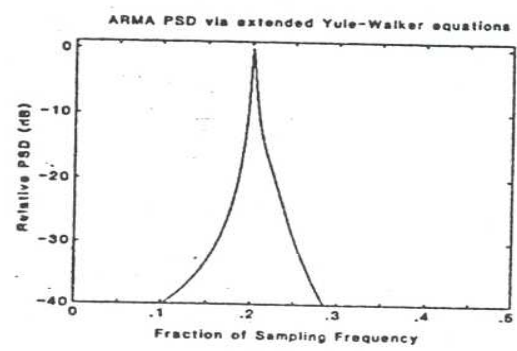
(e)



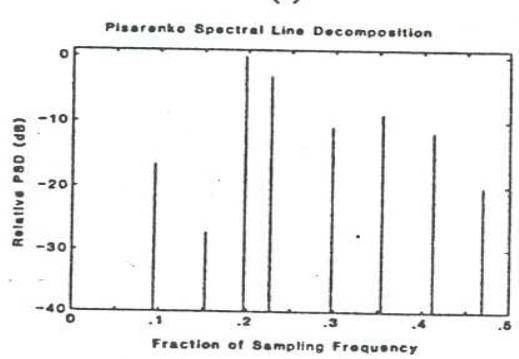
(f)



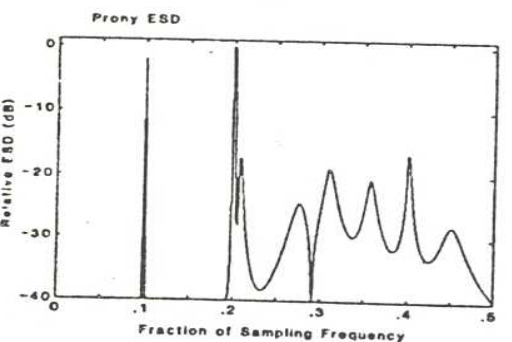
(g)



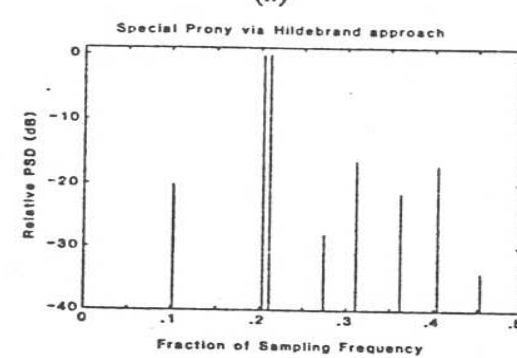
(h)



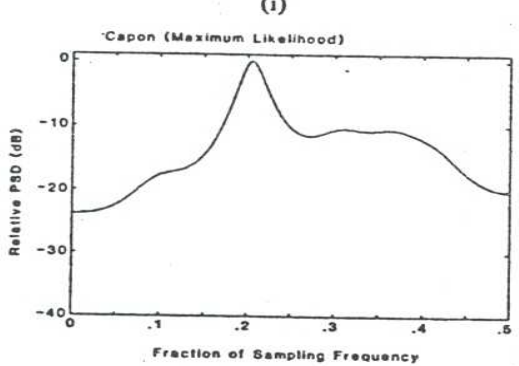
(i)



(j)



(k)



(l)

VÍC UŽ TOHO NEBUDE