

## M2100 Matematická analýza II

### Opravná zápočtová písemná práce, 19. 5. 2017

1. (20 bodů) Nalezněte obecná řešení zadaných diferenciálních rovnic:

a) (10 bodů)

$$y'' - 5y' + 6y = e^x (2x + 5),$$

b) (10 bodů)

$$xy' + y \ln x = y \ln y.$$

2. (20 bodů) Zjistěte, zda množina  $P = \mathbb{N}$  společně se zobrazením  $\rho$  určeným předpisem

$$\rho(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|, \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

tvoří *metrický prostor*.

3. (10 bodů) Stanovte *vzdálenosti* funkcí  $f, g \in C[0; 1]$  zadaných předpisem

$$f(x) = x, \quad g(x) = 2x$$

v obou metrikách  $\rho_c$  i  $\rho_I$  (tj. metrice *stejněměrné konvergence* a *integrální metrice*).

4. (20 bodů) Určete hodnoty zadaných limit, příp. *ukážete* jejich neexistenci:

a) (10 bodů)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4},$$

b) (10 bodů)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2 + y^2}.$$

5. (10 bodů) Zjistěte, zda výraz

$$x \sin 2y \, dx + x^2 \cos 2y \, dy$$

představuje (totální) diferenciál některé funkce dvou proměnných, a pokud ano, dotýcnou *kmenovou funkci* nalezněte.

6. (20 bodů) Najděte a určete všechny globální extrémy funkce dvou proměnných zadané předpisem

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2(x - y)$$

na množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  ohraničené trojúhelníkem  $ABC$ , kde  $A = [0; 0]$ ,  $B = [0; 2]$ ,  $C = [-2; 0]$ .