Zkouška 3 části

1) písemky v semestru 8 na cvičeních po 2 bodech LIMIT 8b

– opravný termín ve zkouškovém

2) písemná → početní (max 12 bodů)

$$\text{dosažené body} + \frac{(\text{body ze semestru} - 8)}{2} \geq 7$$

→ teoretická část (max 10)

aspoň 5

3) ústní zkouška (seznam toho, co musíte bezpodmínečně umět)

4

Vektorový prostor U nad K ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

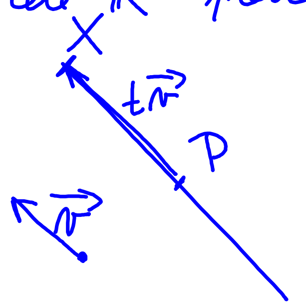
prvky prostoru U nazýváme vektory, ale někdy také body.

Afinní podprostor $M \subseteq U$ je neprázdná podmnožina tvaru

$$M = P + V = \{P + v,\ v \in V\}$$

kde $P \in U$ je bod a $V \subseteq U$ je vektorový podprostor.

Příklady: Všechny body, přímky, roviny a celé $\mathbb{R}^3$ jsou afinní podprostory v $\mathbb{R}^3$.



bod $P = P + \{\vec{o}\}$

přímka p: $X = P + tv$ –

$p = P + [v]$

Věta: Vektorový podprostor v definici afinního podprostoru je určen jednoznačně, tj. jestliže $P_1 + V_1 = P_2 + V_2$, kde $P_1, P_2 \in \mathcal{U}$ a $V_1, V_2 \subseteq \mathcal{U}$ jsou podprostory, pak $V_1 = V_2$.

Důkaz na DU

Tato věta umožňuje definovat zaměření afinního podprostoru

$$\mathcal{M} = P + V$$

$$Z(\mathcal{M}) = V = \{ M_1 - M_2 , \text{ kde } M_1, M_2 \in \mathcal{M} \}$$

Afinní kombinace bodů P, Q v $\mathcal{U}$ je bod

$$X = aP + bQ$$

kde $a + b = 1$

$P = Q \qquad X = P = Q$

$P \neq Q \qquad$ body X vyplní přímku $\overleftrightarrow{PQ}$

Afinní kombinace k bodů je lineární kombinace

$$X = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k$$

kde $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$.

$$X = (1 - a_2 - a_3 - \dots - a_k) P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k = P_1 + a_2 (P_2 - P_1) + a_3 (P_3 - P_1) \dots$$

Důkaz: Nechť $M = P + V$, $V \subseteq U$ je podprostor

$$P_1 = P + v_1,\ P_2 = P + v_2,\ \dots,\ P_k = P + v_k$$

$$\sum a_i P_i = \cancel{(1 - a_2 - a_3 - \dots - a_k)} = a_1 (P + v_1) + a_2 (P + v_2) + \dots$$

$$\dots + a_k (P + v_k) = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) P + \sum a_i v_i$$

$$= P + \underbrace{\sum a_i v_i}_{\in V} \in M$$

OBRÁCENÁ VĚTA Nechť $M \subseteq U$ je neprázdná podmnožina, která s každými dvěma body obsahuje i jejich afinní kombinaci. Pak je M afinní podprostor (Dává ekvivalentní definici af. podprostoru.)

Parametrický popis afinního podprostoru

U vekt. prostor, $\mathcal{M} = P + V$

$V \subseteq U$ je podprostor s bází $v_1, v_2, \dots v_k$.

To znamená, že každý bod X z $\mathcal{M}$ můžeme psát ve tvaru

$$X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k$$

Tento zápis nazýváme parametrický popis afinního podprostoru

Ze střední školy známe pro přímku

$$X = P + t v \qquad \begin{aligned} x_1 &= p_1 + t a_1 \\ x_2 &= p_2 + t a_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P &= (p_1, p_2) \\ v &= (a_1, a_2) \end{aligned}$$

pro rovinu

$$X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 \qquad \begin{aligned} x_1 &= p_1 + t_1 a_1 + t_2 a_2 \\ x_2 &= \dots \\ x_3 &= \end{aligned}$$

Přechod od implicitního popisu k parametrickému znamená vyřešit soustavu $Ax = b$ pomocí parametrů.

$$Ax = b$$

$$x = \left(a_1 + t_1 c_1 + t_2 c_2 + t_3 c_3, \ldots \ldots \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Od parametrického popisu k implicitnímu

Věta: Každý afinní podprostor je množina vektorů, jejichž souřadnice v dané bázi jsou řešení soustavy

$$Ax = b.$$

$$U \longrightarrow K^n$$

Naopak děláme řádk. algoritmem C převedli na schod tvar

$$\left(E \mid C \mid m\right) \;\rightleftharpoons\; \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1 \\ \hline A & O & b \end{array}\right)$$

C_1 je ve schod tvaru bez nulového řádku

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ O \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$A_1 x = C_1 t + b_1$$

$$\boxed{A x = b}$$

To je hledaná soustava.

$X \in M$, pak x je řešením $Ax = b$.

Nechť $Ax = b$. Víme, že soustava $C_1 t = A_1 x - b_1$ je řešitelná pro nějaké x a neznámé $(t_1, t_2, \ldots t_k)$

Vzájemná poloha afinních podprostorů

$\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{U}$ jsou afinní podprostory

Vzájemná poloha je následující

(1) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ .... $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$

(2) $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$ rovnoběžné $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$

nebo

$Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$

(3) $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou mimoběžné

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ $Z(\mathcal{M}) \nsubseteq Z(\mathcal{N})$

ani

$Z(\mathcal{N}) \nsubseteq Z(\mathcal{M})$

Vektorové podprostory $V, W \subseteq U$

$V \cap W$

$V + W$

$\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq U$ afinní podprostory

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ je afinní podprostor pokud je neprázdný

– vzájemná poloha afinních podprostorů

$$\begin{array}{c|cc} \mathcal{N} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \\ \hline & & \end{array}$$

$\mathcal{N}$ \ $\mathcal{M}$	parametr.	impl.
param.	(1)	(3)
impl.	(3)	(2)