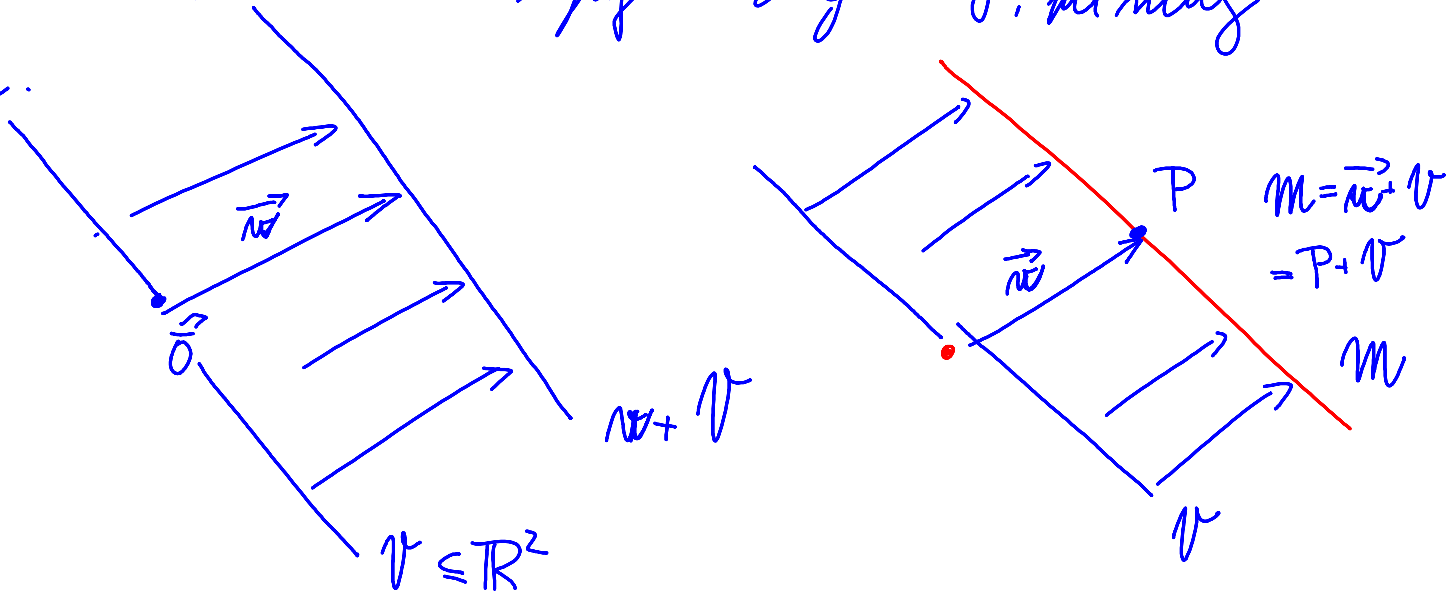
Afinní geometrie

Motivace: chceme definovat afinní podprostor vektorového prostoru, aby v rovině kromě podprostorů byly vždy tady přímky a celá rovina.



Příklad 2 A matice $k \times n$ nad $\mathbb{R}$ a řešíme soustavu

$$Ax = b \qquad x \in \mathbb{R}^n, \; b \in \mathbb{R}^k$$

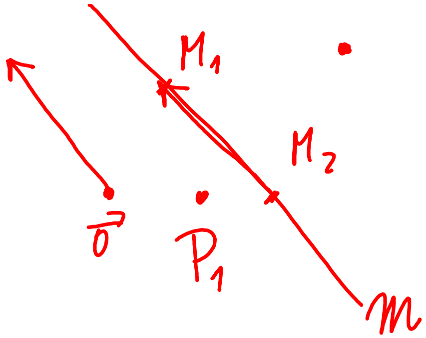
Jestliže tato soustava má řešení $(h(A) = h(A|b))$,
pak množina řešení tvoří afinní podprostor

x_0 je ~~[illegible]~~ jedno pevné řešení, pak každé další řešení x
je tvaru $\quad x = x_0 + (x - x_0)$

$$Ax = Ax_0 + A(x - x_0)$$

$$b = b + A(x - x_0) \qquad \varphi(x) = Ax$$

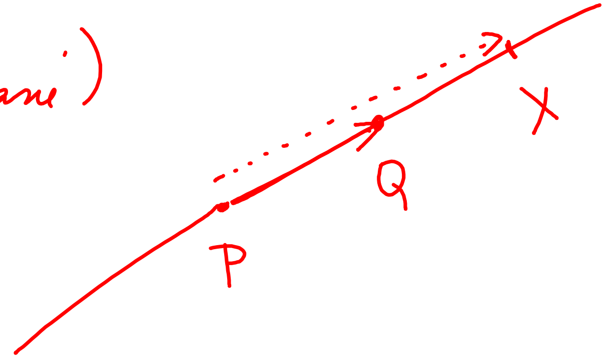
$$A(x - x_0) = 0 \Rightarrow x - x_0 \in \ker \varphi \text{ vekt. podprostor.}$$



Afinní kombinace bodů

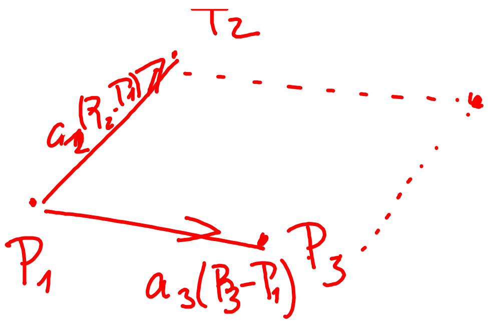
P, Q dva body (vektory) v $\mathcal{U}$ (různé)

přímka $\overleftrightarrow{PQ}$ $\qquad X = P + t(Q-P)$



$$X = P + tQ - tP = (1-t)P + tQ$$

$$aP + bQ \qquad a+b=1$$



$$X = P_1 + a_2(P_2 - P_1) + a_3(P_3 - P_1)$$

Věta Nechť M je afinní podprostor. Pak M s každými body $P_1, P_2, \dots, P_k$ obsahuje také jejich afinní kombinaci (Speciálně: s každými dvěma různými body obsahuje přímku, kterou určují.)

Důkaz: Nechť $P \in \mathcal{M}$ je nějaký bod. Potom

$$\mathcal{M} = P + \{M - P,\ M \in \mathcal{M}\}$$

Dokážeme, že množina $V = \{M - P,\ M \in \mathcal{M}\}$ je vekt. podprostor

1) je neprázdná $\quad P - P = \vec{o} \in V$

2) $M - P \in V$

$$t(M-P) = \underbrace{tM + (1-t)P}_{\in \mathcal{M}} - P \in V$$

$$B - P,\ C - P \in V$$

$$B - P + C - P = \left(\underbrace{2\left(\overbrace{\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C}^{\in \mathcal{M}}\right) - 1 \cdot P}_{\in \mathcal{M}}\right) - P \in V$$

Implicitní zápis pomocí soustavy lin rovnic

$\mathbb{R}^n$ $\qquad M = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \quad Ax = b \}$

Ve střední škole $\qquad$ přímka v $\mathbb{R}^2$ $\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$

$a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

rovina v $\mathbb{R}^3$ $\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

přímka v $\mathbb{R}^3$

$$Ax = b \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \end{cases}$$

dim prostoru řešení je

$n - h(A) = 3 - h(A)$

$h(A) = 2$.

$\underline{\text{dim } M}$

$M = P + V = P + Z(M)$

$M = \dim Z(M)$

Postup = důkaz.

Nechť pro souřadnice bodů $X \in M$ platí

$$x_1 = c_{11} t_1 + c_{12} t_2 + \dots \, c_{1k} t_k + m_1$$

$$x_2 = c_{21} t_1 + c_{22} t_2 + \dots + c_{2k} t_k + m_2 \qquad X = t_1 v_1 + \dots + M$$

$$\dots$$

$$x_n = c_{n1} t_1 + c_{n2} t_2 + \dots + c_{nk} t_k + m_n$$

$$Ex = x = Ct + m \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

$$\left(E \mid C \mid m \right) \xrightarrow[\text{řádk. operace}]{\text{element.}} \left(A_1 \mid C_1 \mid m_1 \right)$$

$$A_1 x = C_1 t + m_1$$

Tedy k x jsme našli t tak, že

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix}$$

Tedy také $x = E x = Ct + m$

X je prvkem M

(4) m a n mimoběžné $m \cap n = \emptyset$ $Z(m) \nsubseteq Z(n)$ ani $Z(n) \nsubseteq Z(m)$

v $\mathbb{R}^4$ dvě mimoběžné roviny

$m: X = t_1(1,0,0,0) + t_2(0,1,0,0) = \{(t_1, t_2, 0, 0)\}$

$n: Y = (0,0,0,1) + s_1(0,1,0,0) + s_2(0,0,1,0) = \{(0, s_1, s_2, 1)\}$

$Z(m) \nsubseteq Z(n)$
$Z(n) \nsubseteq Z(m)$

$Z(m) = \{(t_1, t_2, 0, 0)\}$
$Z(n) = \{(0, s_1, s_2, 0)\}$
$Z(m) \cap Z(n) = \{(0, t, 0, 0)\}$

(2) Ze dvou soustav rovnic dostaneme jednu

(3) 2 parametry vyjádříme dosadíme do soustavy

(1) $M + t_1 u_1 + t_2 u_2 = N + s_1 v_1 + s_2 v_2 \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$

Spojení afinních podprostorů $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ je nejmenší afinní podprostor obsahující $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

$\mathcal{M} : X = M + V = M + Z(\mathcal{M})$

$\mathcal{N} : Y = N + W = N + Z(\mathcal{N})$

$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} : Z = M + \{Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) + [N - M]\}$