$f(-,u): v \longmapsto f(v,u)$

linearita znamená $\quad f(v_1+v_2,u) = f(v_1,u) + f(v_2,u)$

$f(kv,u) = k\, f(v,u)$

<u>Příklad</u>: $U = \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$$

$$= (2y_1 + y_2)x_1 + (3y_1 + 2y_2)x_2$$

<u>Příklad</u>. $U = \mathbb{R}^n$; A matice $n \times n$

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

$$\|$$

$$f(x,y) = x^T A y = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \right)$$

Příklad: bilineární forma na $\mathbb{R}_2[x]$

$f(a_2x^2+a_1x+a_0,\ b_2x^2+b_1x+b_0) = a_2 \cdot b_1$ ✓

$\boxed{f(x, \text{—}\,\text{''}\,\text{—}) = 1}$ $\rightarrow$ $a_2 \cdot b_1 + a_1$ NENÍ

$a_2 \cdot b_1 \cdot b_0$ NENÍ

Matice bilineární formy v bázi

Nechť U je vektorový prostor s bází $\alpha = (u_1, \ldots, u_n)$

Matice bilineární formy $f: U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi α je

matice A: $\quad a_{ij} = f(u_i, u_j)$

Naopak tedy matice určuje bilineární formu

$$\{\text{bilin. formy}\} \xleftrightarrow{\cong} \{\text{matice}\}$$

Zejména: $x^T A y = x^T B y \Longrightarrow A = B$

Příklad. Najděte matici bilineární formy

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = 2x_1y_1 + \overbrace{3}^{a_{23}} x_2 y_3 - \overbrace{2}^{a_{12}} x_1 y_2$$

ve standardní bázi

a) $a_{11} = f(e_1, e_1) = 2$

$\vdots$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\bar{x}^T B \bar{y} = x^T A y = (P\bar{y})^T A (P\bar{y}) = \bar{x}^T P^T A P \bar{y}$$

Protože je matice určena bilin formou jednoznačně,

$$\boxed{B = P^T A P}$$

Definice. Matice A, B (čtvercové) se nazývají **kongruentní**, jestliže existuje regulární (= invertibilní) matice P taková, že $B = P^T A P$.

(jsou to matice téže bilin formy v různých bázích)

Diagonalizace symetrické bilineární formy

Motto: každá sym. bil. f má ve vhodné bázi diagonální matici

Q. co se děje při změně báze s elementární maticí přechodu? $B = P^T A P$

a) výměna dvou řádků (1. a 2.)

P. X = "X s vyměněnými řádky"

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = P^T, \quad P = P^T \ \dots \text{ odpovídá výměně 1 a 2. sloupce}$$

Algoritmus: provádíme stejné řádkové a sloupcové operace

→ dostaneme matici $P_k^T \cdots P_2^T (P_1^T A P_1) P_2 \cdots P_k = P^T A P$,

kde $P = P_1 \cdots P_k$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} P_1^T A P_1 & P_1^T \cdot E \\ \hline E \cdot P_1 & \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{c|c} P^T A P & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 12 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & +4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & +4 & -100 & -5 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & +4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & +4 & -100 & -5 & -5 & 2 \end{array}\right) \quad \mathrm{III} + \mathrm{II}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{array}}_{B} \quad \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{array}}_{P^T}$$