Kvadratické formy

$f : U \times U \to \mathbb{K}$ symetr. bilin. forma

Kvadratická forma $g : U \to \mathbb{K}$ určená touto bilin. formou je

$$g(u) = f(u,u)$$

Matice kvadr. formy g je matice f $\quad \left(f(u_i,u_j)\right)_{i,j=1}^{n}$

kde $(u_1,\dots,u_n)$ je báze vekt. prostoru U.

Minule algoritmus pro nalezení báze B, v jejíž souřadnicích je

$$g(u) = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{nn}y_n^2$$

$(u)_B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

(2)

Jiný algoritmus UPRAVA NA ČTVERCE

$g : U \to K$ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) je kvadr. forma. Hledá v bázi α maticí ...

$g(u)$ $g(x) = \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} x_i x_j$ $\qquad a_{ij} = a_{ji}$

(1) Předp. že $a_{11} \neq 0$

$$g(u) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 a_{1n} x_1 x_n + \underbrace{a_{22} x_2^2 + \dots\dots}_{\text{bez } x_1} =$$

$$= a_{11} \left(x_1^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} x_1 x_2 + \dots + 2 \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_1 x_n \right) + h(x_2, x_3, \dots x_n) =$$

$x_1 = A_1,\ A_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2, \dots A_n = \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$

$$= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 - a_{11} \left(\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} x_2^2 + \dots \right) + h(x_2, x_3, \dots x_n)$$

$n=2 \qquad a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}} x_1 x_2\right) = a_{11}\left\{\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2\right)^2 - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2\right)^2\right\}$

$(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2 = A_1^2 + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + \dots + 2A_1A_n + \underline{A_2^2 + A_3^2 + \dots A_n^2}$

$(\dots A_i + A_j \dots) \quad (\dots A_i + A_j + \dots$

$\underline{+ 2A_2A_3 + \dots + 2A_nA_{n-1}}$

brez A_1

$A_1^2 + 2A_1A_2 + \dots + 2A_1A_n = (A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2 - \underline{A_2^2 - A_3^2 - \dots - A_n^2 - 2A_2A_3 - \dots}$

$\underline{- 2A_{n-1}A_n}$

brez A_1

Tole ponovimo na $n-2$

4

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \tilde{h}(x_2, x_3, \dots x_n)$$

Nové souřadnice

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$\tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3, \quad \dots \quad \tilde{x}_n = x_n$$

$$g(u) = a_{11}\tilde{x}_1^2 + \underbrace{\tilde{h}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots \tilde{x}_n)}_{\text{kvadr. forma v } (n-1) \text{ proměnných}}$$

2 Nechť $a_{11} = 0$, ale nějaké $a_{ii} \neq 0$. V tomto případě použijeme i místo 1 a pak uděláme stejně

3 $a_{ii} = 0$ pro všechna i. Nechť pro nějaké j, k platí

$$a_{jk} \neq 0$$

5

Potom zvolíme nové souřadnice takto

$$y_j = x_j - x_k \quad \Rightarrow \quad x_j = y_j + x_k = y_j + y_k$$
$$y_k = x_k$$
$$y_i = x_i$$

$$g(u) = a_{jk}\, x_j x_k + \dots = a_{jk}(y_j + y_k)\, y_k + \dots = a_{jk}\, y_j y_k + \boxed{a_{jk}}\, y_k^2 +$$

Dostáváme koeficient u y_k^2 různý od nuly. Můžeme v úpravě pokračovat podle 2 a 1

Nakonec dostaneme $g(u) = c_{11} z_1^2 + c_{22} z_2^2 + \dots + c_{nn} z_n^2$

kde $z_1, z_2, \dots z_n$ jsou NOVÉ SOUŘADNICE, získané pomocí

6

jsou dány nové souřadnice v kombinaci původních souřadnic $x_1, x_2 \ldots x_n$

$$z_1 = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n$$
$$z_2 = \ldots$$
$$z_n = q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \ldots + q_{nn}x_n$$

$$z = Qx$$

$x = (u)_\alpha$ α je původní známá báze

$z = (u)_\beta$ β je hledaná báze (chceme ji najít)

$$(u)_\beta = Q\,(u)_\alpha$$

$\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$
$\beta = (v_1, v_2 \ldots v_n)$

Tedy
$$Q = (id)_{\beta\alpha}$$
$$Q = \left((u_1)_\beta\ (u_2)_\beta, \ldots (u_n)_\beta\right)$$

7

$$u_1 = (v_1, v_2, \dots v_n)\, s_1(Q)$$
$$u_2 = (v_1, v_2, \dots v_n)\, s_2(Q)$$
$$\vdots$$

$$\underbrace{(u_1, u_2, \dots u_n)}_{\text{toto známe}} = \underbrace{(v_1, v_2, \dots v_n)}_{\text{chceme spočítat}} \underbrace{Q}_{\text{známe}} \qquad Q = (id)_{\beta,\alpha}$$

$$(v_1, v_2, \dots v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)\, Q^{-1} \qquad Q^{-1} = (id)_{\alpha,\beta}$$

Takto najdeme bázi β

(8)

Příklad $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mám ve standardní vyjádření

$$g(x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3 =$$

$y_1 = x_1 - x_2$
$y_2 = x_2$
$y_3 = x_3$

$x_1 = y_1 + y_2$
$x_2 = y_2$
$x_3 = y_3$

$$= 4(y_1+y_2)y_2 + 8(y_1+y_2)y_3 + 12y_2y_3 =$$

$$= 4y_2^2 + 4y_2y_1 + 20y_2y_3 + 8y_1y_3 = 4(y_2^2 + y_2y_1 + 5y_2y_3) + 8y_1y_3 =$$

$$= 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}y_1^2 + \frac{25}{4}y_3^2 + \frac{5}{2}y_1y_3\right) + 8y_1y_3 =$$

$$= 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - y_1^2 - 2y_1y_3 - 25y_3^2$$

9

$$= 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 + (-1)\left(\left(y_1 + y_3\right)^2 - y_3^2\right) - 25y_3^2 =$$

$$= 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - \left(y_1 + y_3\right)^2 + y_3^2 - 25y_3^2 =$$

$$= 4\underbrace{\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)}_{z_1}^2 - \underbrace{\left(y_1 + y_3\right)}_{z_2}^2 - 24\underbrace{y_3}_{z_3}^2 = 4z_1^2 - z_2^2 - 24z_3^2$$

V našem případě α byla stand. báze $\mathcal{E}$, chceme najít bázi $\mathcal{B}$

$$z_1 = y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3 = x_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{5}{2}x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3$$

$$z_2 = y_1 + y_3 = x_1 - x_2 + x_3$$

$$z_3 = y_3 = x_3$$

10

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\approx Q = (id)_{B\alpha} = (id)_{B\mathcal{E}} \qquad \mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$$

Baze B je dána vektory v_1, v_2, v_3

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)(id)_{\mathcal{E}B} = (e_1, e_2, e_3)\, Q^{-1}$$

$$v_1 = s_1(Q^{-1}), \quad v_2 = s_2(Q^{-1}), \quad v_3 = s_3(Q^{-1})$$

Q^{-1} spočítejte doma a přesvědčte se, že platí

11

Matice v bázi $\alpha = \varepsilon$ $\qquad\qquad$ matice v bázi β

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = A = \underbrace{\left((id)_{\beta\varepsilon}\right)^T}_{=\left(Q^{-1}\right)^T} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \underbrace{(id)_{\beta\varepsilon}}_{=Q^{-1}}$$

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array} \sim \begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}$$

Postupem z minulé přednášky jsme získali jinou diagonální matici a jinou bázi.

Polární báze není určena jednoznačně
(je jich nekonečně mnoho obecně)

12

Reálné kvadratické formy

Nyní se budeme zabývat kvadr. formami $g : U \to \mathbb{R}$

VĚTA = SYLVESTRŮV ZÁKON SETRVAČNOSTI

Nechť $g : U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma. Pak existuje v U báze B, v níž má g vyjádření

$$g(u) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - y_{k+2}^2 - \dots - y_l^2 + 0 \cdot y_{l+1}^2 + \dots + 0 \cdot y_n^2$$

přičemž počet $+1, -1$ a 0 nezávisí na bázi B

To je ta setrvačnost

13

Dôkaz: Už sme dokázali, že existuje báza γ, v jejíž súradniciach je

$$g(u) = c_{11} z_1^2 + c_{22} z_2^2 + \dots + c_{nn} z_n^2$$

Vektory bázy γ lze usporiadať tak, aby $c_{11}, \dots c_{kk} > 0$; $c_{k+1,k+1} \dots \dots c_{\ell\ell} < 0$

a $c_{\ell+1,\ell+1} = \dots = c_{nn} = 0$.

$\gamma = (u_1, u_2, \dots u_n)$

Nech $c_{ii} > 0$. Potom zvolíme nový vektor v_i tak, aby

$$v_i = \left(\sqrt{c_{ii}}\right)^{-1} u_i$$

Súradnice $y_1, y_2 \dots y_n$ v báze $v_1, v_2, \dots v_n$

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{c_{ii}}} y_i \qquad c_{ii} z_i^2 = c_{ii}\left(\frac{y_i}{\sqrt{c_{ii}}}\right)^2 = y_i^2$$

14

$c_{ii} < 0$

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{-c_{ii}}} u_i$$

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{-c_{ii}}} y_i$$

$$c_{ii} z_i^2 = c_{ii} \left(\frac{1}{\sqrt{-c_{ii}}} \right)^2 y_i^2 = c_{ii} \left(-\frac{1}{c_{ii}} \right) y_i^2 = -y_i^2$$

$c_{ii} = 0 \qquad v_i = u_i$

V bázi $B = (v_1, v_2, \dots v_n)$ bude mít g vyjádření:

$$g(u) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2 .$$

15

Důkaz „nezávislosti".

Nechť v bázi $\alpha = (u_1, \dots u_n)$ je

$$g(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots\dots$$

a v bázi $\beta = (v_1, v_2 \dots v_n)$

$$g(u) = y_1^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - \dots$$

Předpokládejme, že $p > q$.

$V = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ $\quad u \in V$, $u = x_1 u_1 + \dots + x_p u_p + 0 \cdot u_{p+1} + \dots + 0 \cdot u_n$

$u \neq 0$ $\quad g(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 > 0$

$W = [v_{q+1}, \dots, v_n]$

(16)

pro $u \in \dot{W}$ platí $u = y_{q+1} v_{q+1} + \cdots + y_n v_n$

$g(u) = -y_{q+1}^2 - \ \cdots\cdots + 0 y_i^2 \cdots\cdots \quad \leq 0$

$\dim U = n$

$V + W \subseteq U$

$\dim(V+W) \leq n$

Dokážeme, že $\dim (V \cap W) \geq 1$.

$\dim (V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim (V+W) =$

$= p + n - q - \dim (V+W) \geq p + n - q - n = p - q \geq 1$

podle předpokladu $p > q$.

Existuje $u \in V \cap W$, $u \neq \vec{O}$. Potom platí

$0 < g(u) \leq 0$

Spor.

(17)

Definice signatury kvadr. formy $g: U \to \mathbb{R}$

– je to trojice (s_+, s_-, s_0)

kde s_+ udává počet $+1$, s_- počet -1 a s_0 počet 0

v diagonálním tvaru kvadr. formy.

$\dim U = n \qquad s_+ + s_- + s_0 = n$

g matice A, víme, že existuje reg. matice P tak, že

$$P^T A P = D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

13

hodnost matice P je [illegible] (počet nenulových členů)

$$h(D) = h(P^T A P) = h(A)$$

Hodnost kvadr. formy g je hodnost její matice. Platí:

$$h = s_+ + s_-$$

Signatura určuje dimenzi a hodnost kvadr. formy

(s_+, s_-, s_0)

Někdy se místo signatury myslí jenom s_-

Potom $s_+ = h - s_-$

$s_0 = n - h$

19

Kritérium kongruence matic

Dvě symetrické čtvercové matice A a B jsou kongruentní, právě když příslušné kvadr. formy mají stejnou signaturu (s_+, s_-, s_0).

Dk – viz text k přednášce

20

Řekneme, že kvadr. forma $g : U \to \mathbb{R}$ je

(1) pozitivně definitní, jestliže $g(u) > 0$ pro všechna $u \neq \vec{o}$

$\Longleftrightarrow$ $g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ v nějaké bázi

$\Longleftrightarrow$ $(s_+, s_-, s_0) = (n, 0, 0)$

(2) negativně definitní, jestliže $g(u) < 0$ pro všechna $u \neq \vec{o}$

$\Longleftrightarrow$ $g(u) = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$

$\Longleftrightarrow$ $(s_+, s_-, s_0) = (0, n, 0)$

(3) pozitivně semidefinitní, jestliže $g(u) \geq 0$ pro všechna u

$\Longleftrightarrow$ $g(u) = x_1^2 + \ldots + x_k^2$

$\Longleftrightarrow$ $s_- = 0$

21

(4) negativně semidefinitní, jestliže $g(u) \leq 0$ pro všechna u

$\iff g(u) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_k^2$

$\iff s_+ = 0$

(5) indefinitní, jestliže $g(u) > 0$ pro nějaké u

$g(v) < 0$ pro nějaké v

$\iff g(u) = x_1^2 + \dots - x_{k+1}^2 - \dots$

$\iff s_+ \geq 1, \; s_- \geq 1$

(22)

Sylvestrovo kritérium

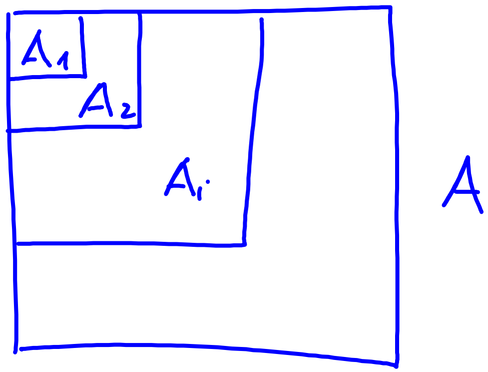
(1) Každá forma je pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory její matice jsou kladné. ✓

(2. každá forma je negativně definitní, právě když pro její hlavní minory $M_1, M_2, \dots M_n$ platí

$$(-1)^i M_i > 0 \qquad M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \dots$$

(23)

Hlavní minory matice A řádu $n \times n$



A_i je matice $i \times i$

$M_i = \det A_i$ se nazývá hlavní minor řádu i

$$g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad M_i > 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4

-1

-24

24

$$g_i(n) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_i = \underbrace{(-1)(-1)\cdot(-1)}_{i\text{-volte}} = (-1)^i \quad \begin{matrix} > 0 & i \text{ pari} \\ < 0 & i \text{ dispari} \end{matrix}$$