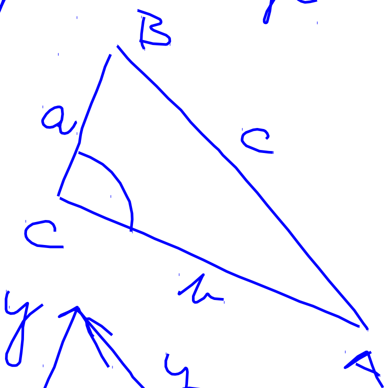
Prostory se skalárním součinem

Motivace

Geometrie v rovině: Pyth. věta říká:

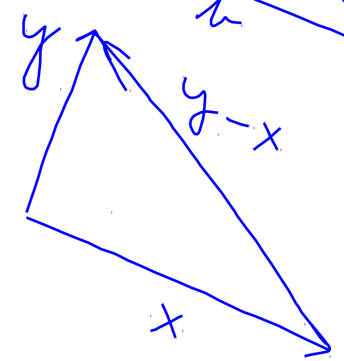
$\triangle ABC$ má pravý úhel u vrcholu C, právě když

$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$A = (x_1, x_2) \quad B = (y_1, y_2) \quad C = (0,0)$$

$$\underbrace{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}_{c^2} = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{a^2} + \underbrace{y_1^2 + y_2^2}_{b^2}$$



2

$$y_1^2 - 2y_1x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

$$(-2)(x_1y_1 + x_2y_2) = 0$$

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ jsou na sebe kolmé, právě když

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0$$

Výraz vlevo vede definici stand. skalárního součinu v $\mathbb{R}^2$.

Vlastnosti $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$

- bilin. sym. forma, $f(x,y) = f(y,x)$
- kladně definitní

$$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ pro } \vec{x} \neq \vec{0}$$

Definice reálného skalárního součinu

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$, potom zobrazení

$$\langle -, - \rangle \quad U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

se nazývá skalární součin, jestliže

(1) $\forall u, v \in U \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$

(2) $\forall u, v \in U \qquad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(3) $\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\} \qquad \langle u, u \rangle > 0$

Z vlastností (1) a (2) plyne

$$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$$

Z vlastností (1) a (2) plyne, že $\langle \vec{0}, w \rangle = 0 = \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle$

Velikost vektoru u je

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Dva vektory u, v jsou kolmé, jestliže $\langle u, v\rangle = 0$.

Příklad: 1) Na $\mathbb{R}^2$ vezmeme

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Na $\mathbb{R}^n$ vezmeme

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

sym. bilin. poz. definitní forma

standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$

3) Na $\mathbb{R}^n$ existuje spousta skalárních součinů.

$n = 2$ $\quad \langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3 x_2 y_2$

je taky skalární součin.

Skalární součin nad $\mathbb{C}$

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$.

Zobrazení $\langle \, , \, \rangle : U \times U \to \mathbb{C}$

se nazývá skalární součin, jestliže platí

(1) $\forall u, v, w \in U, \ \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$

(2) $\forall u, v \in U \quad \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ (komplexně sdružené číslo $z = z_1 + i z_2$, $\overline{z} = z_1 - i z_2$)

(3) $\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\} \ \langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ a $\langle u, u \rangle > 0$

Z (1) a (2) plyne

$$\langle u, av + bw \rangle = \overline{a} \langle u, v \rangle + \overline{b} \langle u, w \rangle$$

$$\langle u, av+bw\rangle \overset{(2)}{=} \overset{6}{\overline{\langle av+bw, u\rangle}} \overset{(1)}{=} \overline{a\langle v,u\rangle + b\langle w,u\rangle} =$$

$$= \bar{a}\,\overline{\langle v,u\rangle} + \bar{b}\,\overline{\langle w,u\rangle} \underset{(2)}{=} \bar{a}\,\langle u,v\rangle + \bar{b}\,\langle u,w\rangle$$

Velikost vektoru definujeme opět

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

a kolmost $u \perp v$, jestliže $\langle u,v\rangle = 0$.

Příklady: 1) $\mathbb{C}^n$ vekt. prostor nad $\mathbb{C}$ má stand. skalární součin

$$\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}$$

Je vidět, že vlastnosti (1), (2) a (3) platí

(2) $\langle x, ay\rangle = x_1 \cdot \overline{ay_1} + x_2\,\overline{ay_2} + \dots + x_n\,\overline{ay_n} = \bar{a}\,(x_1\overline{y_1} + \dots + x_n\overline{y_n})$

$$= \bar{a}\,\langle x,y\rangle$$

(3) $\langle x, x\rangle = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0$

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$$

Příklady

(2) $C[a,b]$ spojité reálné funkce na intervalu $[a,b]$.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$ je skalární součin na $C[a,b]$

$$\langle pf+qh, g\rangle = \int_a^b (pf+qh)g\,dx = p\int_a^b fg\,dx + q\int_a^b hg\,dx$$

$$= p\langle f,g\rangle + q\langle h,g\rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx > 0 \text{ za } f \not\equiv 0.$$

3 Za $C[a,b]$ neprekidne funkcije sa $[a,b]$ u $\mathbb{C}$, definirajmo skalarni produkt

$$\langle \;\; \rangle : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

tako:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \geq 0$$

Cauchyova - Schwarzova nerovnost

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem. Potom pro každé dva vektory $u, v \in U$ platí

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

přičemž rovnost nastane právě když jsou vektory u, v lin. závislé.

Aplikace pro různé skalární součiny

① $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

C-S nerovnost:

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

$x_i \geq 0$, $y_i = 1$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\sqrt{n}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

aritmetický průměr — kvadratický průměr

Kdy nastane rovnost: $x = (x_1, x_2, \dots x_n) = k(1, 1, 1, \dots 1)$

Právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

(2) V $C[a,b]$ vezmeme $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

C-S nerovnost říká, že

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}$$

Důkaz Cauchyovy nerovnosti:

Uvažujme skalární součin nad $\mathbb{R}$:

Jestliže $u = \vec{o}$, pak $|\langle u, v\rangle| = 0 = \|u\|\,\|v\|$.

Předpokládejme, že $u \neq \vec{o}$. Platí

$$0 \le \|tu - v\|^2 = \langle tu - v, tu - v\rangle = t^2\langle u, u\rangle - t\langle u, v\rangle - t\langle v, u\rangle$$

$$+ \langle v, v\rangle = t^2\langle u, u\rangle - 2t\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = at^2 + bt + c$$

Platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Proto diskriminant kvadr. polynomu $at^2 + bt + c$

je ≤ 0

$$D = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \le 0$$

$$\langle u, v\rangle^2 \le \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$$

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$$

Kdy nastane rovnost?

$D=0$ právě když $at^2+bt+c=0$ má jeden reálný kořen. Tj. existuje $t\in\mathbb{R}$ tak, že

$$\|tu-v\|^2=0$$

tj

$$tu-v=0$$

$$v=tu$$

právě když u,v jsou lin. závislé ($u\neq\vec{0}$). $\blacksquare$

Při důkazu nad $\mathbb{C}$ postupujeme takto:

$$0\le\|tu-\alpha v\|^2 = t^2\langle u,u\rangle - t\bar{\alpha}\langle u,v\rangle - t\alpha\langle v,u\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle v,v\rangle$$

Zvolme $\alpha=\langle u,v\rangle$.

Při této volbě dostaneme

$$0 \le \|tu - \alpha v\|^2 = t^2 \|u\|^2 - 2t\,|\langle u,v\rangle|^2 + |\langle u,v\rangle|^2 \|v\|^2$$

Dál postupujeme analogicky jako nad $\mathbb{R}$.

Trojúhelníková nerovnost

V prostoru U se skalárním součinem platí

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

Důkaz:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$\le \|u\|^2 + \|v\|^2 + |\langle u,v\rangle| + |\langle v,u\rangle| = \|u\| + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2$$

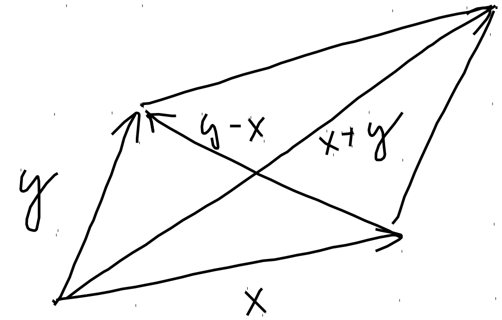
$$\le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

Cauch. nerovnost

Rovnoběžníkové pravidlo

$\forall u, v \in U$:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$



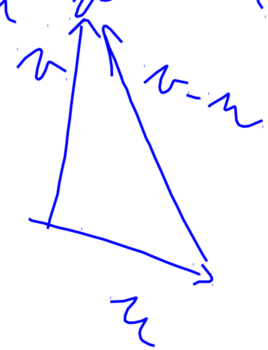
Důkaz: Ověříme výpočtem pomocí skal. součinu. Za DÚ.

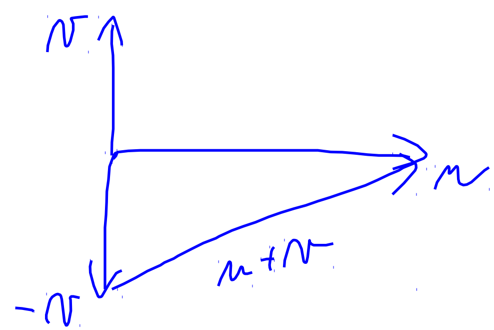
Pythagorova věta

Vektory u a v jsou na sebe kolmé, právě když

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Idea výpočtu podobné důkazu trojúhelníkové nerovnosti.





<u>Úhel dvou vektorů</u> u a v je číslo $\alpha \in [0, \pi]$ takové, že

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} \qquad \|u\| \neq 0, \ \|v\| \neq 0$$

Z Cauchyovy nerovnosti víme, že

$$-\|u\| \, \|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\| \, \|v\|$$

Po dělení je

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$$

Na $[0, \pi]$ je funkce $\cos$ klesající, proto existuje právě jedno α takové, že

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} .$$

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ ve vekt. prostoru U se skal. součinem jsou

ortogonální,

jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

(Každé 2 různé vektory jsou na sebe kolmé.)

Lemma: Jsou-li $u_1, u_2, \dots, u_k$ ortogonální nenulové vektory, pak jsou lin. nezávislé.

Důkaz: Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{O}$.

Tuto rovnost skalárně vynásobíme vektorem u_i.

$$\underbrace{a_1 \langle u_1, u_i \rangle}_{=0} + \dots + \underbrace{a_i \langle u_i, u_i \rangle}_{\neq 0} + \dots + \underbrace{a_k \langle u_k, u_i \rangle}_{=0} = \underbrace{\langle \vec{O}, u_i \rangle}_{=0}$$

16

$$a_i \langle u_i, u_i \rangle = 0$$

Tedy $a_i = 0$, vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. nezávislé.

<u>Ortonormální vektory</u> $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou vektory, pro které

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Speciálně $\|u_i\| = 1$.

<u>Ortonormální báze</u> je báze tvořená ortonormálními vektory.

Grammův - Schmidtův ortogonalizační proces (GSOP)

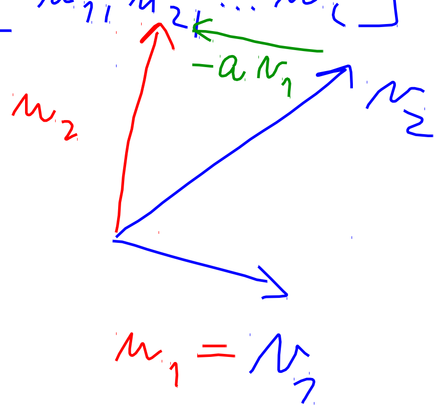
je postup, který z lin. nezávislých vektorů vytvoří ortog. vektory se stejným lin. obalem.

Věta: Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé vektory. Potom existují ortogonální vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ takové, že

$$u_i = v_i - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_{i-1} v_{i-1}. \qquad 1 \le i \le k$$

Tj.: $[u_1, u_2, \dots, u_i] = [v_1, v_2, \dots, v_i] \qquad 1 \le i \le k.$

V dim 2



$u_2 = v_2 - a v_1$

$u_2 \perp u_1$

Důkaz: Volíme $u_1 = v_1$, pak $[u_1] = [v_1]$

Nechť máme $u_1, u_2, \dots u_{i-1}$ zkonstruovány a platí

$$[u_1, u_2, \dots u_j] = [v_1, v_2, \dots v_j] \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

Tvaříme

$$u_i = v_i - b_1 u_1 - b_2 u_2 - \dots - b_{i-1} u_{i-1}$$
$$= v_i - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_{i-1} v_{i-1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{neboť} \\ [u_1 \dots u_{i-1}] = [v_1, \dots, v_{i-1}] \end{array} \right)$$

Hledáme $b_1, b_2, \dots b_{i-1}$ tak, aby $u_i \perp u_1, u_2, \dots u_{i-1}$. Červenou rovnost násobíme u_1

$$0 = \langle u_i, u_1 \rangle = \langle v_i, u_1 \rangle - b_1 \langle u_1, u_1 \rangle - b_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} - \dots + b_{i-1} \underbrace{\langle u_{i-1}, u_1 \rangle}_{=0}$$

Odtud

$$b_1 = \frac{\langle v_i, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} . \quad \text{Analogicky} \quad b_j = \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\|u_j\|^2}$$

Zvolíme-li b_j jiným způsobem, kde

$$u_i \perp u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$$

a přitom

$$[u_1, \dots, u_i] = [v_1, \dots, v_{i-1}, u_i] =$$

$$= [v_1, \dots, v_{i-1}, v_i] .$$

Důležitá poznámka

Výsledek GSOP je jednoznačně určen pořadím vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$. Při jiném pořadí, dostaneme jiné ortogonální vektory.