Zkouška

1. písemky na cvičeních v semestru

8x max 2 body

K postupu je potřeba aspoň 8 bodů

Opravná písemka na začátku zkouškového

2. Písemka ve zkouškovém

početní (max 12b) teoretická (10b)

bonus ze semestru + poč. bodů ≥ 7 ≥ 5

$$\frac{\text{body ze semestru} - 8}{2}$$

3. vnitřní zkouška
– seznam věcí, které je třeba umět bezpodmínečně

Vše je v ISu v interaktivní osnově

1. předn.
2. předn.

Požadavky ke zkoušce

Učební materiály – v ISu

(1) tabule z přednášek

(2) některé přednášky jako pdf

(3) materiály doc. Kadárka

(4) Učební text, skripta prof. Zlatoše po kapitolách

Úlohy – sbírka J. Elderová

DÚ s jednoduššími cvičeními

Afinní geometrie

U vektorový prostor nad $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Afinní podprostor M ve vekt. prostoru U je neprázdná podmnožina, která je tvaru

$$M = P + V$$

kde $P \in U$ (bod) a $V \subseteq U$ je vektorový podprostor.

Přitom $P + V \underset{def}{=} \{P + v \in U,\ v \in V\}$

V se nazývá zaměření afinního podprostoru M

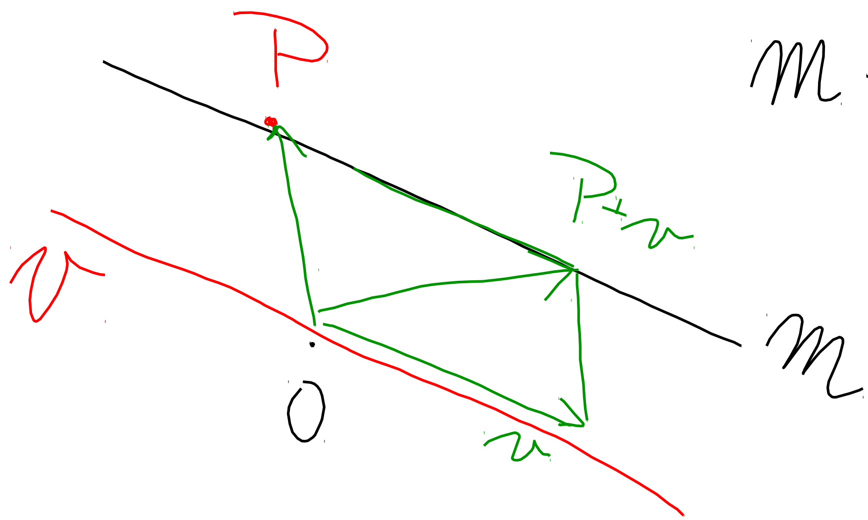
jako $Z(\mathcal{M})$. Dimenzi afinního podprostoru $\mathcal{M}$ definujeme jako dimenzi jeho zaměření

$$\dim \mathcal{M} = \dim Z(\mathcal{M}) = \dim V$$

Příklady $\quad \mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

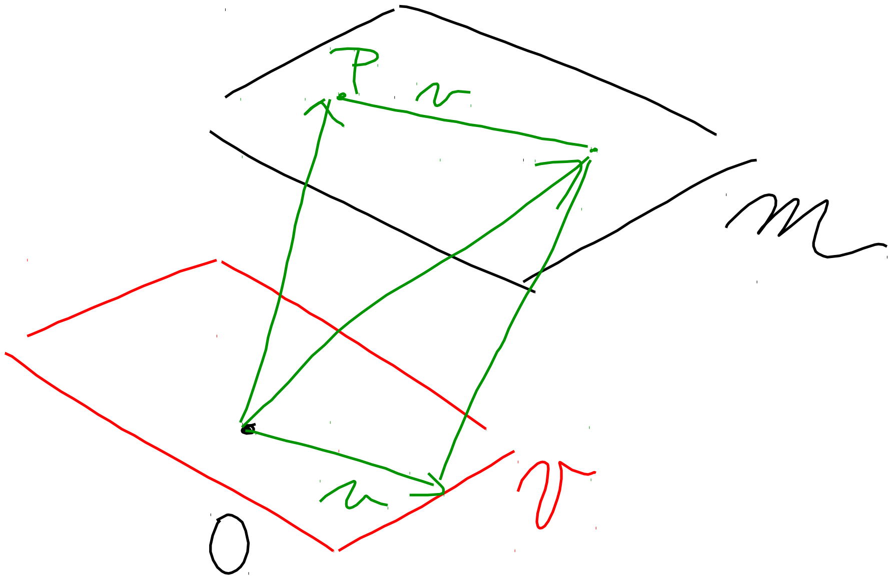
1. $\mathcal{M} = P$ bod $\qquad \mathcal{M} = P + \{\vec{o}\}$ je afinní podprostor

2. $\mathcal{M}$ přímka je afinní podprostor $\qquad \mathcal{M} = P + V$



3 $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{M}$ je linearna ravnina



$\mathcal{M} = P + \mathcal{V}$

4 $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, A matrica $k \times n$, $b \in \mathbb{R}^k$

$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \ Ax = b\}$

Je li M neprazna, je to afini potprostor u $\mathbb{R}^n$

$r(A) = r(A|b)$ Frobeniusova rila

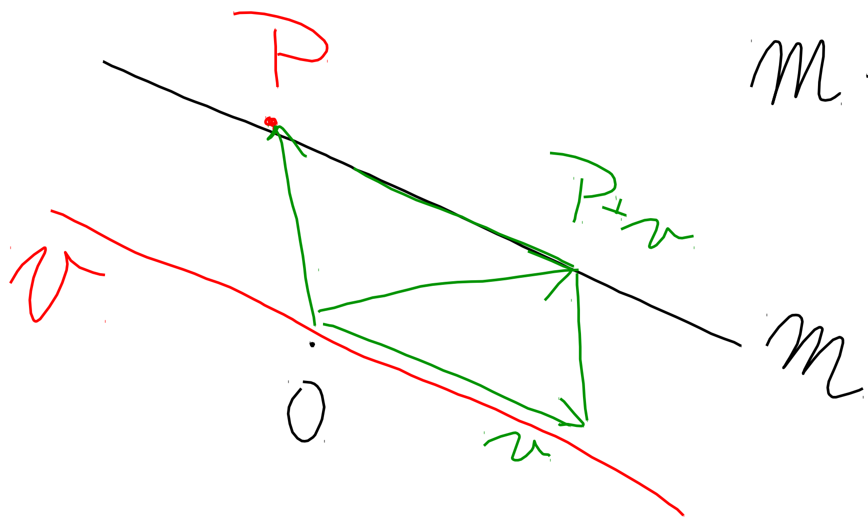
jako $Z(\mathcal{M})$. Dimenzi afinního podprostoru $\mathcal{M}$ definujeme jako dimenzi jeho zaměření

$$\dim \mathcal{M} = \dim Z(\mathcal{M}) = \dim V$$

Příklady $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{M} = P$ bod $\qquad \mathcal{M} = P + \{\vec{o}\}$ je afinní podprostor

2. $\mathcal{M}$ přímka je afinní podprostor $\qquad \mathcal{M} = P + V$



<u>Věta:</u> Zaměření afinního podprostoru je určeno jednoznačně, tj. jestliže

$$P_1 + V_1 = P_2 + V_2$$

kde $P_1, P_2 \in U$, $V_1, V_2 \leq U$, pak

$$V_1 = V_2 .$$

<u>Důkaz</u> $P_1 + \vec{o} \in P_2 + V_2$

Tedy existuje $v_2 \in V_2$ tak, že

$$P_1 = P_2 + v_2$$

$$P_1 - P_2 = v_2 \in V_2$$

Nechť $v_1 \in V_1$ je libovolné. Chceme dk, že $v_1 \in V_2$

$\exists\, v \in V_2$, že

$$P_1 + v_1 = P_2 + v$$

$$v_1 = \underbrace{P_2 - P_1}_{-v_2 \,\in\, V_2} + \underbrace{v}_{\in V_2} \in V_2$$

Dokázali jsme $V_1 \subseteq V_2$.

Obdobně se dokáže, že $V_2 \subseteq V_1$, tedy $V_1 = V_2$.

AFINNÍ KOMBINACE BODŮ

P, Q dva různé body ve vekt. prostoru U

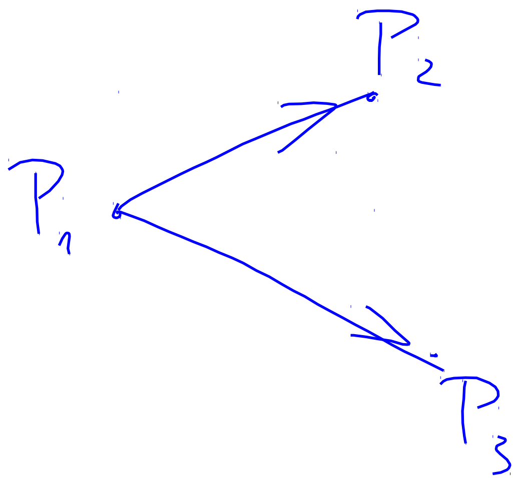
Přímka PQ je množinou bodů, které lze zapsat takto:

$$P + t(Q-P) = $$
$$= P + tQ - tP = $$
$$= (1-t)P + tQ$$

Afinní kombinace bodů P a Q je kombinace
$$(1-t)P + tQ$$
nebo $sP + tQ$, kde $s+t=1$.

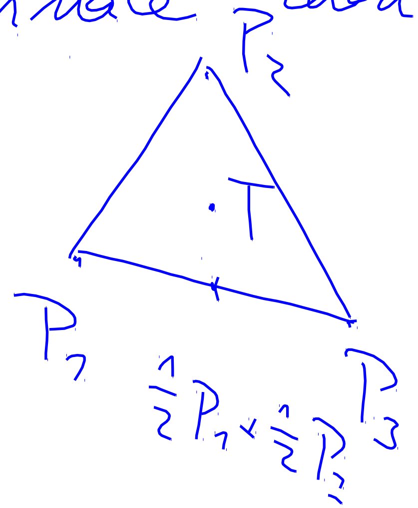
Afinní kombinace bodů $P_1, P_2, \dots P_k$ je
$$t_1P_1 + t_2P_2 + \dots + t_kP_k \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{k} t_i = 1.$$

Afinní kombinace 3 bodů $\quad \sum t_i = 1$



$$t_1 P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3$$
$$= (1 - t_2 - t_3) P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3$$
$$= P_1 + t_2 (P_2 - P_1) + t_3 (P_3 - P_1)$$

Pokud tyto 3 body neleží v přímce, vyplní jejich afinní kombinace celou rovinu, kterou tyto 3 body určují.



$$T = \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_3$$

těžiště

Věta: Je-li $\mathcal{M}$ afinní podprostor v $\mathcal{U}$, pak s každými k body $P_1, P_2, \ldots P_k$ obsahuje i všechny jejich afinní kombinace.

Důkaz: Nechť $\mathcal{M} = Q + V$. Tedy
$P_i = Q + v_i$, $v_i \in V$, nechť $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{k} t_i P_i = \sum_{i=1}^{k} t_i (Q + v_i) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)}_{1} Q + t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k$$

$$= Q + \text{vektor z } V \in \mathcal{M}$$

Věta obrácená Nechť $M \subseteq U$ je neprázdná množina, která s každými dvěma body obsahuje i všechny jejich afinní kombinace (geometricky: s každými dvěma různými body obsahuje i přímku, kterou určují), pak je M afinní podprostor.

Důkaz: Vezmeme nějaký bod $P \in M$ a definujme množinu V takto:

$$V = \{ Q - P \in U \,;\, Q \in M \}$$

Potom určitě platí

$$M = P + V$$

$$Q = P + (Q - P)$$

Stačí dokázat, že V je vektorový podprostor:

$$P - P = \vec{0} \in V \qquad V \neq \emptyset$$

Nechť $Q - P \in V$, dokážeme, že $a(Q-P) \in V$

$$a(Q-P) = \underbrace{aQ + (1-a)P}_{\in M} - P \in V.$$

Nechť $B-P,\ C-P \in V$. Dokážeme, že i jejich součet leží ve V

$$(B-P)+(C-P) = \underbrace{2\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C\right)}_{\in M} - 1P}_{\in M} \quad - P \in V.$$

Závěr: Dokázali jsme, že afinní podprostor lze definovat i druhým způsobem pomocí afinních kombinací:

2. definice af. podprostoru

Neprázdná podmnožina $M \subseteq U$ je afinní podprostor, jestliže s každými dvěma body obsahuje i všechny! jejich afinní kombinace (přímka leží celá uvnitř.).

Dvojí popis afinních podprostorů

1) parametrický

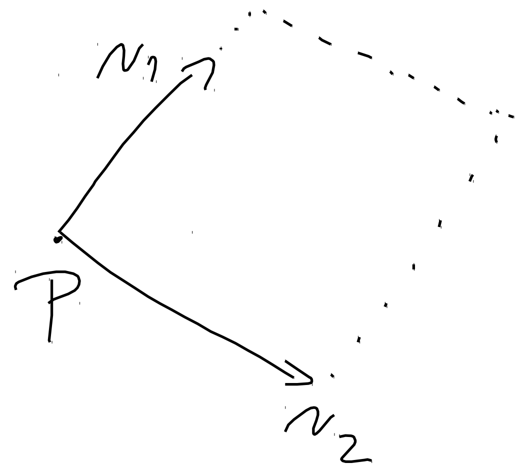
2) implicitní pomocí soustav lin. rovnic

Parametrický popis $\mathcal{M} = P + V$

Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ je nějaká báze podprostoru V. Potom každý bod M z $\mathcal{M}$ lze psát jednoznačně jako

$$M = P + v = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k .$$

Toto je parametrický popis a k-tici $(t_1, t_2, \dots t_k)^T$ nazýváme souřadnice bodu M v afinní bázi $(\underset{\text{počátek}}{P}, v_1, v_2, \dots v_k)$.



$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2$$

Z gymnazia: Premica v $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = b_1 + a_1 t$$
$$x_2 = b_2 + a_2 t$$
$$x_3 = b_3 + a_3 t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$$M = P + t v$$

Ravnina
$$x_1 = b_1 + a_1 t + c_1 s$$
$$x_2 = b_2 + a_2 t + c_2 s$$
$$x_3 = b_3 + a_3 t + c_3 s$$
$$M = P + t v + s u$$

2) Implicitní popis pomocí soustav rovnic

$\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

$M = \{ x \in \mathbb{R}^n,\ A x = b \}$ kde A je matice $k \times n$ a $b \in \mathbb{R}^k$

<u>Střední škola</u>

Rovina v $\mathbb{R}^2$

$$\rho = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \right\}$$
$(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$$

$$\dim M = \dim V =$$
$$= \dim \{ y \in \mathbb{R}^n,\ Ay = 0 \} = n - h(A)$$

Přechod od implicitního popisu k parametrickému:

$Ax=b$ je implicitní popis. Když rovnici vyřešíme pomocí parametrů, dostaneme přímo parametrický popis

$$(x_1, x_2, \dots x_n) = (b_1 + c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \dots c_{1k}t_k,\ b_2 + c_{21}t_1 + \dots\dots,\ \dots)$$

$$M = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots t_k \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k$$

Od parametrického k implicitnímu

Ze střední školy

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1 + a_{11}t + a_{12}s \\ x_2 &= b_2 + a_{21}t + a_{22}s \end{aligned}\right\}$$ odtud vyjádříme s a t pomocí x_1 a x_2

$$x_3 = b_3 + a_{31}t + a_{32}s$$

Sem dosadíme za s a t.

Dostaneme 1 rovnici na x_1, x_2, x_3.

Parametrický popis

$$x_1 = c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \dots c_{1k}t_k + m_1$$
$$x_2 = c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + \dots + m_2$$
$$x_n = \dots\dots$$

Maticově

$$x = Ct + m \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1k} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

$$Ex = Ct + m \qquad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

$$(E \mid C \mid m) \rightsquigarrow$$

el. řádk. operace tak, abychom C dostali na schod. tvar → bez nulového řádku ve schod. tvaru

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1 \\ \hline A & 0 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$A_1 x = C_1 t + b_1$$

$$\boxed{Ax = b}$$

Nechť $Ax = b$

Chceme ukázat, že x splňuje parametrický popis $x = Ct + m$ pro nějaké t. t najdeme jednoznačně jako řešení soustavy

$$A_1 x = C_1 t + b_1$$

$$C_1 t = A_1 x - b_1$$

$$t = C_1^{-1}(A_1 x - b_1)$$

Navíc x splňuje

$$Ax = b$$

Proto

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix} \iff Fx = Ct + m$$

$$x = Ct + m$$

(22)

Vzájemná poloha af. podprostorů

$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dva af. podprostory v $\mathcal{U}$

(1) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ nebo $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \\ Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N}) \\ \text{nebo } Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M}) \end{array} \right)$$

(2) $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ rovnoběžné

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$$

$$Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N}) \text{ nebo } Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$$

(3) Různoběžné

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$$

$$Z(\mathcal{M}) \nsubseteq Z(\mathcal{N}) \text{ ani } Z(\mathcal{N}) \nsubseteq Z(\mathcal{M})$$

4 Mimběžné

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$$

$$Z(\mathcal{M}) \nsubseteq Z(\mathcal{N}) \text{ ani } Z(\mathcal{N}) \nsubseteq Z(\mathcal{M})$$