Eukleidovská geometrie

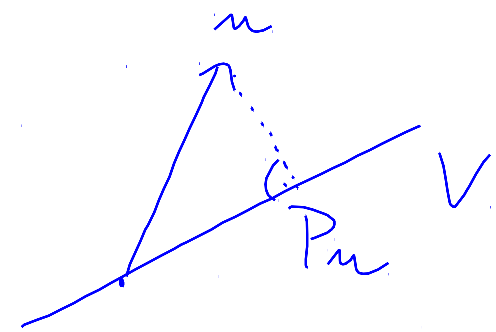
Věta (geometrická charakterizace kolmé projekce)

(a) U vekt. prostor se skal. součinem, V jeho podprostor

$P : U \to V$ kolmá projekce na V.

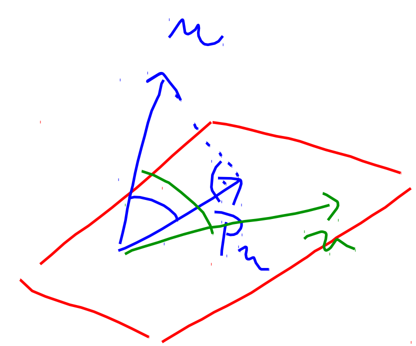
Pro každý vektor $u \in U$ je

$$\|u - Pu\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$



(b) Pu je jediný vektor (až na násobek) z V s vlastností

$$\frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \max_{v \in V} \frac{|\langle v, u \rangle|}{\|v\| \, \|u\|}$$



Pu minimalizuje úhly mezi u a vektory ležícími ve V.

(2)

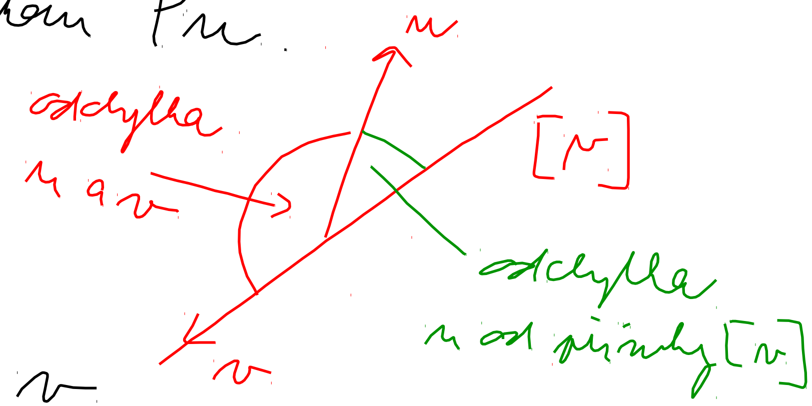
Důkaz (b)

$$\frac{|\langle v,u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{|\langle v, \underbrace{Pu}_{\in V} + \underbrace{u-Pu}_{\in V^\perp}\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{|\langle v,Pu\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} \overset{\text{Cauchyova nerovnost}}{\leq} \frac{\|v\|\,\|Pu\|}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

Rovnost nastane právě když v a Pu jsou lin. závislé, tedy v je násobkem (nenulovým) vektoru Pu.

Poznámka:

$$\frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|\,\|u\|} = \cos \underbrace{\sphericalangle(u,v)}_{\text{odchylka vektorů } u \text{ a } v}$$



$$\frac{|\langle v,u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} = |\cos \sphericalangle(u,v)| = \cos \text{ odchylky vektoru } u \text{ od přímky } [v].$$

Vzdálenost bodu od afinního podprostoru

Definice: Nechť U je vekt. prostor se skal. součinem, $A \in U$ nějaký bod a $\mathcal{M}$ afinní podprostor. Vzdálenost A od $\mathcal{M}$ definujeme takto:

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{M}) = \inf_{M \in \mathcal{M}} \| A - M \|$$

Věta (a) Vzdálenost bodu A od podprostoru $\mathcal{M} = B + Z(\mathcal{M})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{M})^{\perp}$.

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(A, \mathcal{M}) = \| A - M \|$

(2) $A - M \perp Z(\mathcal{M})$

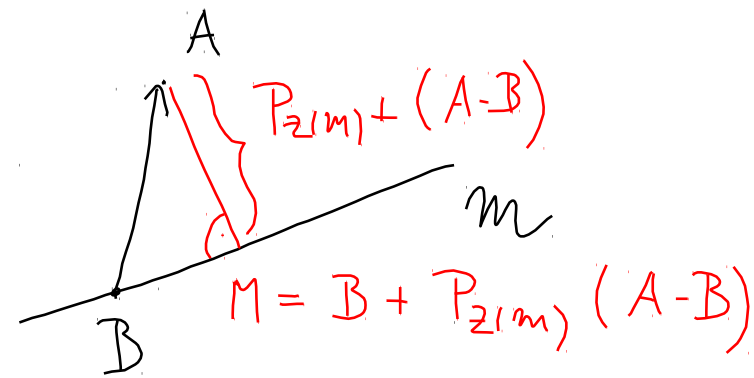
(3) $M = B + P_{Z(\mathcal{M})}(A - B)$

4

<u>Důkaz (a)</u> $X \in \mathcal{M}$ $\quad X = B + u, \quad u \in Z(\mathcal{M})$

$$\|A - X\| = \|A - B - u\| \geq \|(A-B) - P_{Z(\mathcal{M})}(A-B)\| = \|P_{Z(\mathcal{M})^\perp}(A-B)\|$$

věta



(b) (1) $\Rightarrow$ (3)

$M = B + u$, $\quad \operatorname{dist}(A, \mathcal{M}) = \|A - M\|$

$\|A - M\| = \|A - B - u\|$ nabývá pro $u \in Z(\mathcal{M})$ svého minima

pro $u = P_{Z(\mathcal{M})}(A-B)$

Proto $\quad A - M = A - B - P_{Z(\mathcal{M})}(A-B) \quad$ Tedy $M = B + P_{Z(\mathcal{M})}(A-B)$

(3) $\Rightarrow$ (2) jestliže $M = B + P_{Z(\mathcal{M})}(A-B)$, pak $A - M = A - B - P_{Z(\mathcal{M})}(A-B)$

$$= P_{Z(\mathcal{M})^\perp}(A-B) \perp Z(\mathcal{M})$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Nechť $A - M \perp Z(\mathcal{M})$. Pro libovolné $X \in \mathcal{M}$

$$\|A - X\|^2 = \|\underbrace{A - M}_{Z(m)^\perp} + \underbrace{M - X}_{Z(m)}\|^2 = \|A - M\|^2 + \|M - X\|^2 \geq \|A - M\|^2$$

Tedy $\|A - M\| = \min_{X \in \mathcal{M}} \|A - X\| = \operatorname{dist}(A, \mathcal{M})$.

Příklad nechť $U = \mathbb{R}^4$. Spočítáme vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny $\mathcal{M} = \{ y \in \mathbb{R}^4 ; \ a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 + e = 0 \}$

Předp. že $d \neq 0$.

$\operatorname{dist}(A, \mathcal{M}) = \| P_{Z(m)^\perp} (A - B) \|$ pro nějaké $B \in \mathcal{M}$

Zvolme $B = (0, 0, 0, -\frac{e}{d})$

(6)

$Z(m): \quad ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$

$Z(m)^\perp$ je tedy generován vektorem $n = (a, b, c, d)$

Počítáme kolmou projekci vektoru $A - B = (x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d})$ do $Z(m)^\perp$.

$$P(A-B) = \alpha \cdot n = \alpha (a, b, c, d)$$

$$A - B - \alpha n \perp Z(m)^\perp$$

$$\langle A-B, n \rangle - \alpha \langle n, n \rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle A-B, n\rangle}{\langle n, n\rangle} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{dist}(A, m) = \|\alpha n\| = |\alpha| \cdot \|n\| = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

Vzdálenost dvou afinních podprostorů

$\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$, $\quad \mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf \{ \|X - Y\|, \ X \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{N} \}$$

Lze převést na vzdálenost bodu A od afinního podprostoru

$$B + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$$

$X = A + u, \ u \in Z(\mathcal{M}) \quad \Big| \quad Y = B + v, \ v \in Z(\mathcal{N})$

$$\|X - Y\| = \|A + u - B - v\| = \|A - \underbrace{(B - u + v)}_{B + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})}\|$$

Věta:

(a) Vzdálenost m a n je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $\left(Z(m)+Z(n)\right)^{\perp}$

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
$M \in m$, $N \in n$

(1) $\operatorname{dist}(m,n) = \|M-N\|$

(2) $M-N \perp Z(m)+Z(n)$

(3) $M-N = P_{\left(Z(m)+Z(n)\right)^{\perp}}(A-B)$

Důkaz: (a) $\operatorname{dist}(m,n) = \operatorname{dist}\left(A, B+Z(m)+Z(n)\right)$, podle naší předchozí věty je $\operatorname{dist}(m,n) = \left\| P_{\left(Z(m)+Z(n)\right)^{\perp}}(A-B) \right\|$.

(b) (1) $\Rightarrow$ (3) nechť $\operatorname{dist}(M,N) = \|M-N\|$

$M = A + u$, $N = B + v$

$\|M-N\| = \|A - B \underbrace{+ u - v}_{\in Z(m)+Z(n)}\|$ nabývá svého minima pro

$u - v = P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$

Tedy $M - N = A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$

(3) $\Rightarrow$ (2) $M - N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B) \perp Z(m)+Z(n)$

(2) $\Rightarrow$ (1) nechť $M-N \perp Z(m)+Z(n)$. nechť $X = M+u \in m$, $Y = N+v \in n$

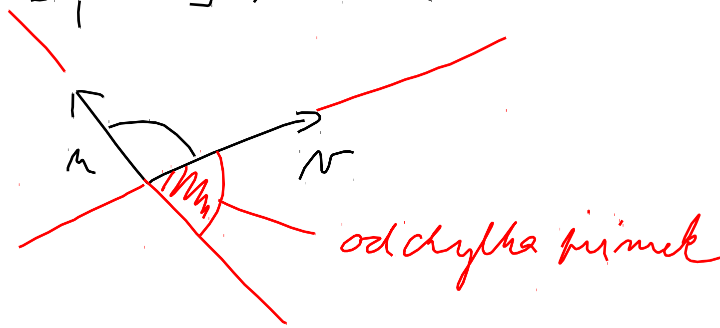
$\|X-Y\|^2 = \|\underbrace{M-N}_{(Z(m)+Z(n))^\perp} + \underbrace{u-v}_{Z(m)+Z(n)}\|^2 = \|M-N\|^2 + \|u-v\|^2 \geq \|M-N\|^2$

$\operatorname{dist}(m,n) = \|M-N\|$

Odchylka afinních podprostorů

Definice ① Odchylka dvou přímek $[u]$, $[v]$ kde $u, v \in U \setminus \{\vec{o}\}$ je úhel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takový, že

$$\cos \alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \, \|v\|}$$



② na další straně

③ Nechť V a W jsou dva podprostory v U takové, že $V \cap W = \{\vec{o}\}$. Pak odchylku V a W definujeme takto:

$$\sphericalangle(V, W) = \inf\left\{\sphericalangle([v],[w]),\ v \in V \setminus \{o\},\ w \in W \setminus \{o\}\right\}$$

④ Nechť V a W jsou dva podprostory s $V \cap W \neq \{\vec{o}\}$. Potom definujeme

$$\sphericalangle(V, W) = \sphericalangle\left(V \cap (V \cap W)^{\perp},\ W \cap (V \cap W)^{\perp}\right)$$

neboť podprostory vpravo splňují podmínku z definice z bodu ②

$$\big(V \cap (V\cap W)^{\perp}\big) \cap \big(W \cap (V\cap W)^{\perp}\big) = (V\cap W) \cap (V\cap W)^{\perp} = \{\vec{o}\}$$

5) Odchylka dvou afinních podprostorů M a N v U je definována jako odchylka jejich zaměření

$$\sphericalangle(M, N) = \sphericalangle\big(Z(M), Z(N)\big)$$

2) Je-li některý z podprostorů V a W nulový, klademe

$$\sphericalangle(V, W) = 0$$

Věta (odchylka přímky a afinního podprostoru)
Nechť $u \neq 0$ a V je podprostor ve V. Pak platí

$$\cos \sphericalangle([u], V) = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

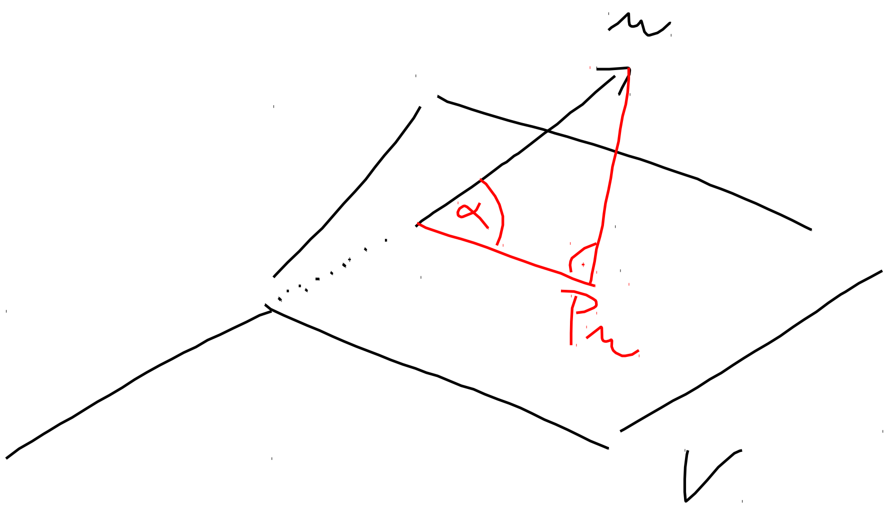
kde P je kolmá projekce do V

Plyne z věty na začátku přednášky:

Nechť $v \in V \setminus \{0\}$.

$$\cos(\sphericalangle([u], V)) = \max \cos \sphericalangle([u],[v]) = \max \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \leq \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

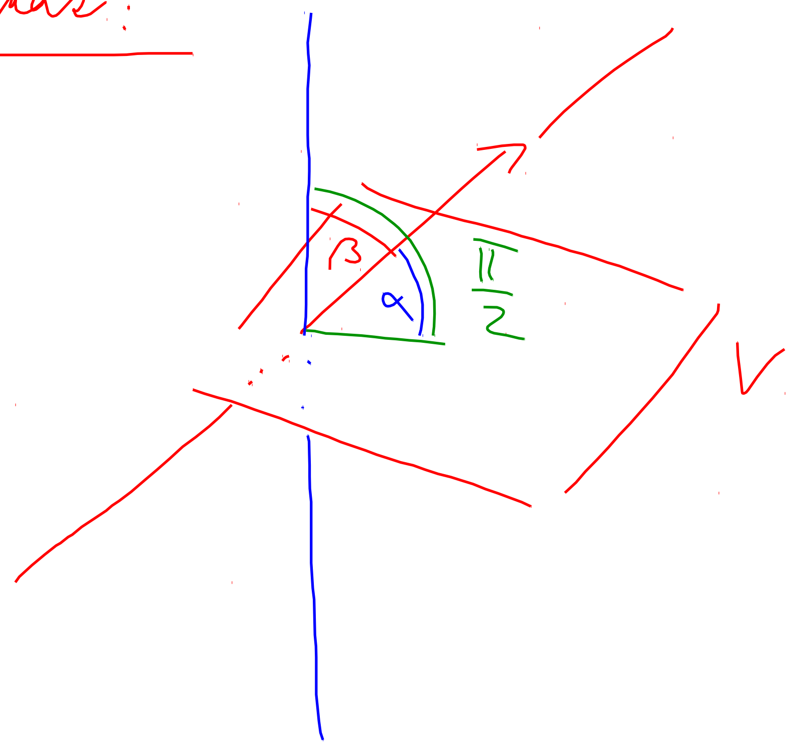
kde rovnost nastane pro $v = Pu$.



Věta: Odchylka přímky a nadroviny je rovna

$\frac{\pi}{2}$ − odchylka přímky a normály k nadrovině

Důkaz:



$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

<u>Příklad</u>: $U = \mathbb{R}^4$, e_1, e_2, e_3, e_4 stand. báze

$$\mathcal{M} = [e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3]$$

$$\mathcal{N} = [e_2 + e_4,\ e_2 + e_3 + e_4]$$

$$Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N}) = [e_3]$$

$$\sphericalangle\big(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N})\big) = \sphericalangle\big(Z(\mathcal{M}) \cap [e_3]^{\perp},\ Z(\mathcal{N}) \cap [e_3]^{\perp}\big)$$

$$Z(\mathcal{M}) \cap [e_3]^{\perp} = [e_1 + e_2]$$

$$Z(\mathcal{N}) \cap [e_3]^{\perp} = [e_2 + e_4]$$

Odchylka přímek $[e_1 + e_2]$ a $[e_2 + e_4]$ má

$$\cos\alpha = \frac{|\langle e_1 + e_2,\ e_2 + e_4\rangle|}{\|e_1 + e_2\|\,\|e_2 + e_4\|} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

OPAKOVÁNÍ – MATICE LIN. ZOBRAZENÍ V DANÝCH BÁZÍCH

U, V vekt. prostory s bázemi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ a $\beta = (v_1, \dots v_k)$
α v U, β ve V
$\varphi : U \to V$ lin. zobrazení
Matice lin. zobrazení φ v bázích α a β je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = (\varphi(u_1))_\beta \ (\varphi(u_2))_\beta \dots (\varphi(u_n))_\beta$$

My budeme tuto definici použít pro lin. zobrazení
$\varphi : U \to U$ (lineární homomorfismy, lin. transformace, lin. operátory)
v případě, že $\alpha = \beta$.

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha \; (\varphi(u_2))_\alpha \; \dots \; (\varphi(u_n))_\alpha \right)$$

Vztah mezi maticí v bázi α a v bázi β je následující:

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = P^{-1} (\varphi)_{\alpha,\alpha} P$$

Čtvercové matice A a B pro které platí

$$B = P^{-1} A P$$

pro nějaké P nazýváme <u>podobné</u>.

Připomenu kongruenci symetrických matic

$$B = P^{T} A P$$