SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY A BILIN. FORMY

Samoadj. operátor: $\varphi : U \to U$, U je vekt. prostor se sk. součinem

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

Každý samoadj. operátor (nad $\mathbb{R}$) definuje bilin. formu, která je symetrická, a to takto:

$$f(u,v) = \langle \varphi(u), v \rangle$$

$$f(au_1+bu_2, v) = \langle \varphi(au_1+bu_2), v \rangle = \langle a\varphi(u_1)+b\varphi(u_2), v \rangle =$$
$$= a\langle \varphi(u_1), v \rangle + b\langle \varphi(u_2), v \rangle = af(u_1,v)+bf(u_2,v).$$

$$f(u, av_1+bv_2) = \langle \varphi(u), av_1+bv_2 \rangle = \dots\dots\dots$$
$$= af(u,v_1) + bf(u,v_2)$$

Symetrie

$$f(u,v) = \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v), u \rangle = f(v,u)$$

Analogicky pro každou symetrickou reálnou matici A umíme zadat.

2

1) samoadjungovaný operátor $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$

2) symetrická bilin. forma $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y) = x^T A y$$

Důsledek hlavní věty o samoadjungovaných operátorech

Každá reálná symetrická matice A typu $n \times n$ je podobná diagonální matici $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, kde na diagonále stojí vlastní čísla matice A, tj. platí

$$A = P^{-1} D P$$

přičemž matice P je ortogonální.

Důkaz: Mějme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$. Pak existuje v $\mathbb{R}^n$ ortonormální báze α tvořená vlastními vektory takovými, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pak pro stand. bázi ε platí

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon} = P^{-1} D P$$

a matice P je ortogonální, neboť je maticí přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi.

4

Důsledek (důsledku)

Každá reálná symetrická matice A je kongruentní diagonální matici s vlastními čísly matice A na diagonále, tj

$$A = P^T D P$$

kde P je ortogonální matice.

Jestliže bilin. forma má matici A v nějaké ortonormální bázi, pak v bázi tvořené ortonormálními vlastními vektory matice A má bilin. forma vyjádření

$$f(x,y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n .$$

kde $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou vl. čísla matice A.

5

<u>Obecněji</u>

<u>Věta:</u> Ke každé symetrické bilin. formě $f: U \times U \to \mathbb{R}$ na vekt. prostoru se skal. součinem existuje ortonormální báze α, v jejíž souřadnicích má f vyjádření

$$f(u,v) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n \qquad (u)_\alpha = x,\ (v)_\alpha = y.$$

Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla samoadj. operátoru, který odpovídá f a báze α je ortonormální báze tvořená vlastními vektory tohoto operátoru.

<u>Typická úloha je:</u> zadána sym. bilin. forma, nebo kvadr. forma

$$g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$$

My ji umíme diagonalizovat, např. doplněním na čtverce

$$g(x) = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = z_1^2 + z_2^2$$

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ jsou souřadnice v bázi $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Abychom našli ortonormální bázi, v níž je g diagonální, musíme postupovat JINAK.

Vezmeme příslušnou sym. bilin. formu

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$

a její matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Najdeme vl. čísla a vlastní vektory této matice

Char. polynom je $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)-1 =$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Vl. čísla jsou

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Vlastní vektory jsou

$$v_1 = \left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad v_2 = \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

V bázi $\alpha = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right)$ – je ortonormální – má bilineární forma vyjádření pomocí matice B

$$f(u,v) = (u)_\alpha B (v)_\alpha . \quad \text{Současně}$$

$$f(u,v) = (u)_\varepsilon A (v)_\varepsilon \implies B = (id)^T_{\varepsilon,\alpha} A (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

8

$$B = (id)_{\varepsilon,\alpha}^{T} A \, (id)_{\varepsilon,\alpha} = (id)_{\varepsilon,\alpha}^{-1} A \, (id)_{\varepsilon,\alpha} =$$

ortogonální ortogonální

$$= (id)_{\alpha,\varepsilon} A \, (id)_{\varepsilon,\alpha} = \text{matice operátoru}$$

$\varphi(x) = Ax$ v bázi α tvořené vl. vektory. Proto

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$ a tedy

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$f(u,v) = \lambda_1 u_1 v_1 + \lambda_2 u_2 v_2 .$$

Příslušná kvadr. forma g má v souřadnicích báze α vyjádření:

$$g(z) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} z_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z_2^2$$

JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Unitární a samoadjungované operátory mají v daném prostoru vždy bázi tvořenou vlastními vektory. Tedy bázi mají diagonální matici. Obecně to ovšem neplatí.

Příklad $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Tento operátor má vl. číslo 2 alg. násobnosti 2, ale geom. násobnosti 1.

$$\ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Tedy φ nemá v $\mathbb{R}^2$ bázi tvořenou vlastními vektory.

Matice φ nemusí mít v žádné bázi diagonální tvar.

Motivace je pro každý lin. operátor s vlastností, že součet alg. násobností jeho vl. čísel je rovno dimenzi prostoru, chceme najít bázi, v níž je matice tohoto operátoru „jednoduchá".

Tímto „jednoduchým" tvarem čtvercové matice je tzv.

JORDANŮV KANONICKÝ TVAR (JKT)

(1) Jordanova buňka je matice $k \times k$ tvaru

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(2) Matice v JKT je blokově diagonální, tvořená na diagonále Jordanovými buňkami.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_3}(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

12

Příklad

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 2 & & & & \\ & & & & & 3 & & & \\ & & & & & & 4 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & & 0 & 4 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

13

$\varphi: U \to U$ lin. operátor s vlastním číslem λ

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k \in U \setminus \{\vec{0}\}$ tvoří řetězec pro vlastní čísla λ, jestliže platí

$$(\varphi - \lambda \mathrm{id})\, u_1 = 0$$
$$(\varphi - \lambda \mathrm{id})\, u_2 = u_1$$
$$(\varphi - \lambda \mathrm{id})\, u_3 = u_2$$
$$\vdots$$
$$(\varphi - \lambda \mathrm{id})\, u_k = u_{k-1}$$

Lemma: Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ tvoří řetězec pro vlastní číslo λ operátoru $\varphi: U \to U$. Potom $V = [u_1, u_2, \dots u_k] \subseteq U$ je invariantní vůči φ, vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ tvoří bázi α prostoru V a v této bázi je

$$\left(\varphi / V\right)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = J_k(\lambda)$$

Důkaz:

$$(\varphi - \lambda\, id)\, u_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(u_1) = \lambda u_1 = \lambda u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0\, u_k$$

$$(\varphi - \lambda\, id)\, u_2 = u_1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(u_2) = u_1 + \lambda u_2 = 1 \cdot u_1 + \lambda u_2 + 0 \cdot u_3 + \dots + 0 \cdot u_k$$

$$(\varphi - \lambda\, id)\, u_3 = u_2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(u_3) = u_2 + \lambda u_3$$

Tedy $\varphi(V) \subseteq V$.

Předpokládejme, že $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. nezávislé. Pak $\alpha = (u_1, \dots u_k)$ je báze prostoru $V = [u_1, u_2, \dots u_k]$ a v této bázi je

$$\left(\varphi/V\right)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = J_k(\lambda)$$

Zbývá dokázat, že $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. nezávislé.

Důkaz indukcí podle k. $u_1 \neq \vec{o}$, tedy pro $k = 1$ tvrzení platí.

Nechť $u_1, u_2, \dots u_{k-1}$ jsou LN, $1 \leq k-1$. Dokážeme, že $u_1, \dots u_k$ jsou LN.

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = o$$

Na tuto rovnici aplikujeme $\varphi - \lambda\, id$. Dostaneme

16

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{(\varphi - \lambda \mathrm{id}) u_i}_{u_{i-1}} = 0$$

$$a_1 \cdot 0 + a_2 u_1 + a_3 u_2 + \dots + a_k u_{k-1} = 0$$

Z lin. nezávislosti $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ plyne, že $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$.
Dosazením do původní rovnice dostaneme, že také $a_1 = 0$.
Tedy $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou LN. $\square$

Platí rovněž obrácené tvrzení

Lemma: Nechť $\varphi : V \to V$ má v nějaké bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = J_k(\lambda).$$

Pak vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ tvoří řetězec pro vlastní číslo λ operátoru φ.

Důkaz: Z definice matice lin. operátoru v bázi α plyne

$$\varphi(u_1) = \lambda u_1 \iff (\varphi - \lambda \mathrm{id})(u_1) = 0$$

$$\varphi(u_2) = u_1 + \lambda u_2 \iff (\varphi - \lambda \mathrm{id})(u_2) = u_1$$

$$\varphi(u_3) = u_2 + \lambda u_3 \iff (\varphi - \lambda \mathrm{id})(u_3) = u_2$$

$$\dots$$

Tedy $u_1, u_2, \dots, u_3$ je řetězec pro vl. čísla λ.

Věta o Jordanově kanonickém tvaru

Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad $\mathbb{K}$. Nechť součet alg. násobností vlastních čísel operátoru $\varphi: U \to U$ je roven n. Pak v U existuje báze α taková, že matice

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Tzv. JKT je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Poznámka: Báze α je tvořena řetězci pro vlastní čísla operátoru φ. Tato báze NENÍ určena jednoznačně, i kdybychom považovali různá pořadí řetězců za stejná.

Věta o JKT nad $\mathbb{C}$

Lze vypustit předpoklad o součtu alg. násobností vl. čísel, neboť je nad $\mathbb{C}$ automaticky splněn.

MATICOVÁ verze věty o JKT

Nechť A je matice $n \times n$ s prvky v tělese K taková, že součet alg. násobností jejích vlastních čísel je roven n. Potom je matice A podobná matici J v JKT, tj. existuje regulární matice P taková, že

$$J = P^{-1}AP$$

Matice J je určena jednoznačně až na pořadí buněk.

Poznámka ① Matice P není určena jednoznačně.

② Nad $\mathbb{C}$ můžete vyrobit příklad o vl. číslech.

Důkaz maticové verze

Pro A čtverc. $n\times n$ definujme lin. operátor

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad \varphi(x) = Ax.$$

Podle 1. verze věty o JKT existuje v $\mathbb{K}^n$ báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J \quad \text{matice v JKT.}$$

Potom platí

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (\mathrm{id})_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1}AP$$