AFINNÍ GEOMETRIE

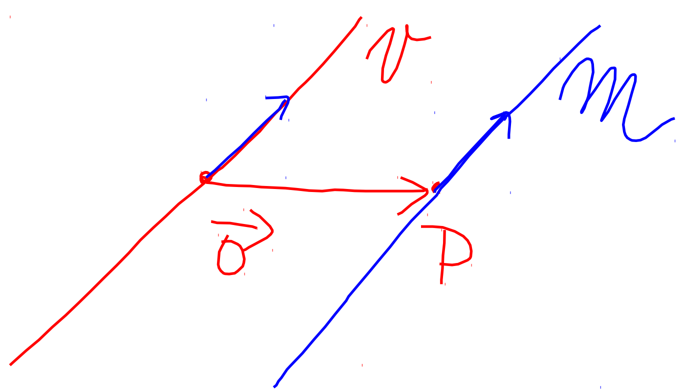
Nechť $\mathcal{U}$ vektorový prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Jeho podmnožina $\mathcal{M}$ se nazývá afinní podprostor, jestliže je tvaru

$$\mathcal{M} = P + \mathcal{V} = \{P + v,\ v \in \mathcal{V}\}$$

kde $\mathcal{V}$ je podprostor v $\mathcal{U}$ a $P \in \mathcal{U}$

<u>Příklad</u>: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$



Konkrétně v $\mathbb{R}^2$ jsou afinními podprostory

(1) všechny body $\mathcal{V} = \{\vec{o}\}$

(2) všechny přímky ($\mathcal{V}$ je přímka procházející počátkem

(3) $\mathbb{R}^2$

<u>Příklad</u> $M = \{x \in \mathbb{R}^n, \ Ax = b\}$ A je matice $k \times n$, $b \in \mathbb{R}^k$

Nechť $h(A) = h(A|b)$.

Pak je soustava řešitelná a M je neprázdná.

Nechť y je nějaké řešení soustavy $Ax = b$.

Potom

$$M = y + \{z \in \mathbb{R}^n, \ Az = 0\}$$

(Věta: každé řešení soustavy $Ax = b$ je tvaru $x = y + z$, kde $Az = 0$)

a $\{z \in \mathbb{R}^n, Az = 0\}$ je vekt. podprostor

Příklad $V = \mathbb{R}_n[x]$

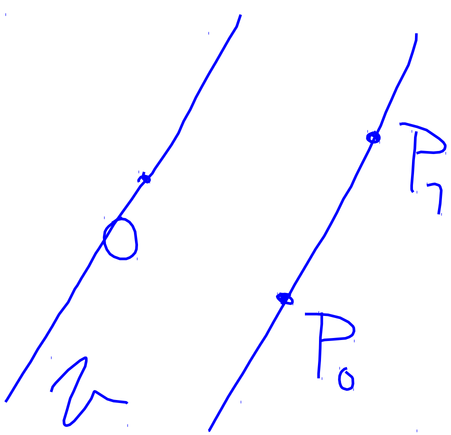
$$M = \{ p \in \mathbb{R}_n[x],\ p(1) = 2017 \}$$

$$M = p_0 + \underbrace{\{ p \in \mathbb{R}_n[x],\ p(1) = 0 \}}_{\text{je vekt. podprostor}}$$

$$p_0(x) = 2017$$

V definici $M = P + V$

bod P není určen jednoznačně



$$P_0 + V = P_1 + V$$

Nicméně vekt. podprostor V je určen jednoznačně. Nazýváme ho

zaměření afinního podprostoru

$$Z(M) = V$$

Důkaz jednoznačnosti:

Nechť $M = P_1 + V_1 = P_2 + V_2$

Ukážeme, že $V_1 = V_2$ tím, že dokážeme $V_1 \subseteq V_2$ a $V_2 \subseteq V_1$.

Platí, že existuje $u_1 \in V_1$ tak, že $P_1 + u_1 = P_2$

tj. $u_1 = P_2 - P_1$.

Nechť $v_2 \in V_2$. Potom $\exists\, v_1 \in V_1$ tak, že

$$P_1 + v_1 = P_2 + v_2$$

$$v_2 = v_1 + (P_1 - P_2) = \underset{\in V_1}{v_1} - \underset{\in V_1}{u_1} \in V_1$$

Dokázali jsme $V_2 \subseteq V_1$. Analogicky obrácená inkluze.

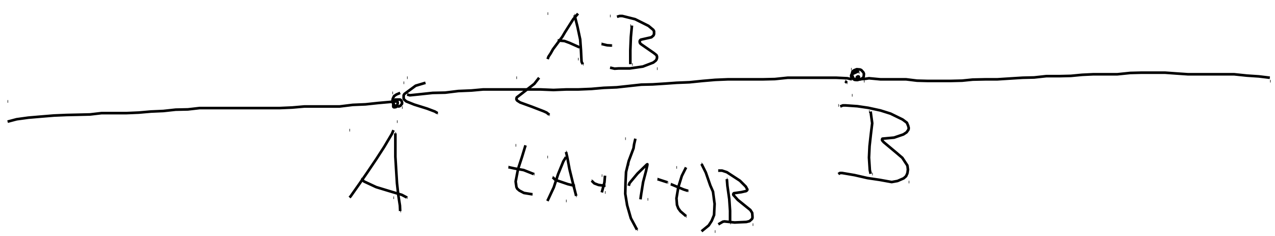
(5)

Dimenze afinní podprostoru

$$\dim M = \dim Z(M).$$

Afinní kombinace bodů A a B je bod

$$tA + (1-t)B = B + t(A-B)$$



$t = 0$ ..... B

$t = 1$ ..... A

$t = \frac{1}{2}$ ..... střed úsečky AB

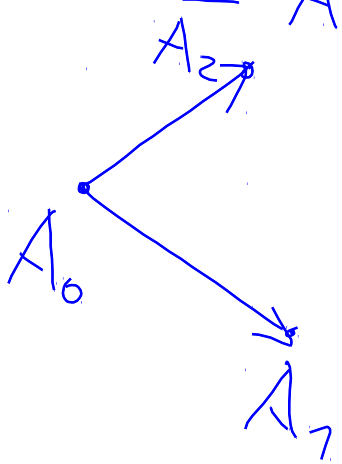
Afinní kombinace více bodů $A_0, A_1, \dots, A_n$

je bod $\sum_{i=0}^{n} t_i A_i$, kde $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$

$$\sum_{i=0}^{n} t_i A_i = t_0 A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_n A_n =$$

$$= (1 - t_1 - t_2 - \dots - t_n) A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_n A_n =$$

$$= A_0 + t_1 (A_1 - A_0) + t_2 (A_2 - A_0) + \dots + t_n (A_n - A_0)$$



Věta: Je-li M afinní podprostor, pak s každými body $A_0, A_1, \dots A_n \in M$ v něm leží i jejich afinní kombinace.

Důkaz: $M = P + V$, kde V je podprostor

$A_i = P + v_i$

$$\sum_{i=0}^{n} t_i A_i = \sum_{i=0}^{n} t_i P + \sum_{i=0}^{n} t_i v_i = P + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} v_i}_{\in V} \in M$$

Věta Nechť M je neprázdná podmnožina vekt. prostoru s vlastností, že pro každé dva různé body $A, B \in M$ v M leží i přímka jimi určená $\left((1-t)A + tB \in M\right)$. Pak je M afinní podprostor.

Důkaz: Mějme libovolný $P \in M$.

Definujme $V = \{A - P,\ A \in M\}$

Ukážeme, že $M = P + V$

Stačí ukázat, že V je vekt. podprostor.

Nechť $A-P, B-P \in V$

$$A-P+B-P = \underbrace{\left\{2\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right)}_{\in M} - 1P\right\}}_{\in M} - P \in V$$

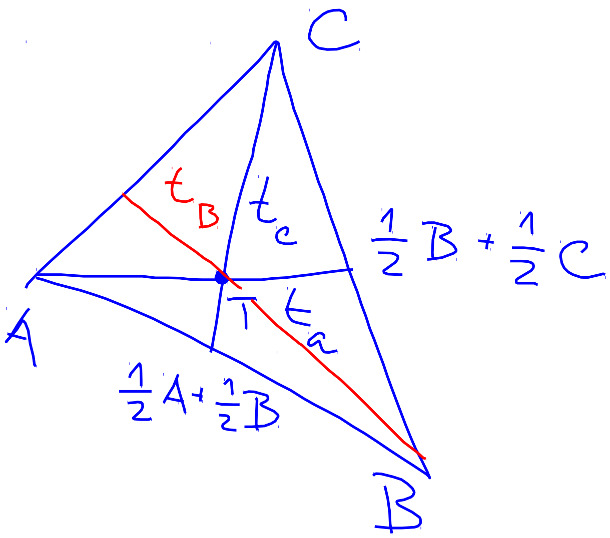
$$A - P \in V$$

$$a \cdot (A - P) = \underbrace{\{aA + (1-a)P\}}_{\in M} - P \in V$$

EKVIVALENTNÍ DEFINICE AFINNÍHO PODPROSTORU

je to neprázdná množina ve vekt. prostoru, která s každými dvěma různými body obsahuje i přímku, kterou tyto body určují

Těžnice v Δ se protínají v jednom bodě.



$$t_c : \quad t\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right) + (1-t)\,C = T$$

$$t_a : \quad s\left(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C\right) + (1-s)\,A = T$$

$$\underline{\tfrac{1}{2}tA} + \underline{\tfrac{1}{2}tB} + \underline{(1-t)C} = \underline{(1-s)A} + \underline{\tfrac{1}{2}sB} + \underline{\tfrac{1}{2}sC}$$

$$\tfrac{1}{2}t = 1-s$$

$$\tfrac{1}{2}t = \tfrac{1}{2}s \implies t = s$$

$$1-t = \tfrac{1}{2}s$$

$$\tfrac{1}{2}t = 1-t$$

$$t = \tfrac{2}{3} = s$$

$$T = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C \in t_B$$

(11)

Další popis afinních podprostorů

Parametrický $\mathcal{M} = P + V$

a vekt. prostor má báze $v_1, v_2, \ldots, v_k$.
Potom každý bod z $\mathcal{M}$ píšeme ve tvaru

$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_k v_k.$$

Parametrický popis přímky v $\mathbb{R}^3$

$$p: \quad X = P + t\vec{v}$$

Parametrický popis roviny ρ v $\mathbb{R}^3$

$$\rho: \quad X = P + t\vec{u} + s\vec{v}$$

Implicitní popis afinního podprostoru v $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$ je dán jako řešení soustavy lin. rovnic

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{K}^n, \ Ax = b\},$$ kde A je matice $k \times n$ a $b \in \mathbb{K}^k$ pro vhodné k

Příklady:

rovina v $\mathbb{R}^3$ $\quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

kde $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$.

přímka v $\mathbb{R}^3$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$h(A) = h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2 \qquad h(A) = h(A|b) = 2$$

$$Z(\mathcal{M}) = \{x \in \mathbb{R}^3, \ Ax = 0\} \qquad \dim Z(\mathcal{M}) = 3 - h(A) = 1$$

Přechod od implicitního popisu k parametrickému

je jednoduchý – řešíme soustavu pomocí parametrů

$Ax = b$ má řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 3t - s \\ x_2 &= 3 - t + 9s \\ x_3 &= 1 \phantom{{}+3t} - 2s \\ x_4 &= 2 + t \end{aligned}$$

$$X = (2+3t-s,\ 3-t+9s,\ 1-2s,\ 2+t)$$

$$= (2,3,1,2) + t(3,-1,0,1) + s(-1,9,-2,0)$$

$$M = \underbrace{(2,3,1,2)}_{P} + \big[\underbrace{(3,-1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,9,-2,0)}_{v_2}\big]$$

(12)

Od parametrického popisu k soustavě rovnic

$$X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \qquad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad v_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

V souřadnicích:

$$x_1 = p_1 + c_{11} t_1 + c_{12} t_2 + \dots + c_{1k} t_k$$

$$x_2 =$$

$$x_n = p_n + c_{n1} t_1 + c_{n2} t_2 + \dots + c_{nk} t_k$$

$$X = Ct + p \qquad C = (c_{ij}) \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$EX = Ct + p$$

$$\left(\underbrace{E}_{n} \,\middle|\, \underbrace{C}_{k} \,\middle|\, \underbrace{p}_{1}\right) \underset{\text{úpravy}}{\overset{\text{řádkové}}{\sim}} \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1 \\ \hline A & 0 & b \end{array}\right)$$

C_1 nemá nulové řádky a je ve schod. tvaru

$$Ex = Ct + p \iff \begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$A_1 x = C_1 t + b_1$$

$$\boxed{Ax = b}$$

Toto je hledaná rovnice.

Každý bod X z M splňuje tuto rovnici.

Musíme ukázat, že každé řešení určuje bod z M.

Nechť pro x platí $Ax = b$. C_1 je ve schod. tvaru a nenulová.

Tedy rovnice
$$C_1 t = A_1 x - b_1$$
má řešení t. Proto platí
$$A_1 x = C_1 t + b_1$$
$$A x = 0 t + b$$
Protože jsme prováděli ekvivalentní úpravy
$$\left(E \mid C \mid r\right) \sim \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1 \\ A & 0 & b \end{array}\right)$$
platí také $Ex = Ct + r$. To znamená, že $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M$.

<u>Průnik afinních podprostorů</u> – je-li neprázdný je afinní podprostor.

3 případy

(1) Oba podprostory popsány soustavou rovnic

$$\mathcal{M}: \; Ax = b \qquad \mathcal{N}: \; Cy = d$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}: \quad \begin{array}{l} Az = b \\ Cz = d \end{array}$$

(2) $\mathcal{M}$ zadán parametricky
$\mathcal{N}$ zadán soustavou

$$\mathcal{M}: \; X = P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

$$\mathcal{N}: \; Ax = b$$

Za $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dosadíme parametrické vyjádření a řešíme soustavu pro $t_1, t_2, \dots, t_k$.
Ta má méně neznámých.

(3) $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zadány parametricky

$$\mathcal{M}: \quad P + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$$

$$\mathcal{N}: \quad Q + s_1 v_1 + s_2 v_2$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ X = P + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = Q + s_1 v_1 + s_2 v_2 \}$$

Řešíme soustavu

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 - s_1 v_1 - s_2 v_2 = Q - P.$$

Stačí spočítat

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ Q + t v_1 + (2-t) v_2 \}$$

$$s_2 = t$$

$$s_1 = 2 + t$$

$$= \underbrace{Q + 2v_2}_{P} + t\underbrace{(v_1 - v_2)}_{\text{vektor}}$$

Spojení afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ značíme $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ a je to nejmenší afinní podprostor obsahující $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

$$\mathcal{M} : P + V$$

$$\mathcal{N} : Q + W$$

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} : P + \underbrace{[Q-P] + V + W}_{\text{součet vekt. podprostorů}}$$