VZÁJEMNÁ POLOHA AFINNÍCH PODPROSTORŮ

Nechť $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou dva afinní podprostory v $\mathcal{U}$.
Podle toho zda

(1) $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ nebo $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$

a

(2) zaměření jednoho je před zaměřením druhého
nebo tomu tak není

definujeme vzájemnou polohu $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ následujícím způsobem:

(I) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ nebo $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$
v tomto případě $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a

2

$Z(m) \subseteq Z(n)$ nebo $Z(n) \subseteq Z(m)$.

II m a n jsou rovnoběžné

$m \cap n = \emptyset$, $Z(m) \subseteq Z(n)$ nebo $Z(n) \subseteq Z(m)$

III m a n jsou různoběžné

$m \cap n \neq \emptyset$ a $Z(m) \not\subseteq Z(n)$ ani $Z(n) \not\subseteq Z(m)$

IV m a n mimoběžné

$m \cap n = \emptyset$ a $Z(m) \not\subseteq Z(n)$ ani $Z(n) \not\subseteq Z(m)$

Může se stát, že

$$Z(m) \cap Z(n) \neq \{\vec{o}\}$$

Příklad dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, které jsou mimoběžné:

$$\rho = (0,0,0,0) + s\underset{e_1}{(1,0,0,0)} + t\underset{e_2}{(0,1,0,0)} = (s,t,0,0)$$

$$\pi = \{(0,0,0,1) + a\underset{e_2}{(0,1,0,0)} + b\underset{e_3}{(0,0,1,0)} = (0,a,b,1)$$

$$\rho \cap \pi = \emptyset \qquad Z(\rho) = [e_1, e_2]$$

$$Z(\pi) = [e_2, e_3]$$

$$Z(\rho) \not\subseteq Z(\pi), \quad Z(\pi) \not\subseteq Z(\rho) \Rightarrow \pi \text{ a } \rho \text{ jsou mimoběžné}$$

$$Z(\rho) \cap Z(\pi) = [e_2]$$

Typická úloha – sestrojit afinní podprostor daných vlastností

Ze střední školy: V $\mathbb{R}^3$ dány 2 mimoběžky k a l, bod A. Sestrojte přímku p takovou, že

1) $A \in p$
2) $p \cap l \neq \emptyset$
3) $p \cap k \neq \emptyset$

Představme si, že máme řešení p. Pak přímka p musí ležet v rovině určené bodem A a přímkou l.

$\alpha = A \sqcup l \qquad p \subseteq \alpha$

p má průnik s přímkou k. Potom má s přímkou k průnik i rovina α. $\Rightarrow$ řešení: Sestrojíme α: $A \sqcup l$ a spočítáme $\alpha \cap k = \{B\}$. Pak $p = \overleftrightarrow{AB}$

Varianta této úlohy v $\mathbb{R}^4$

Dán bod A, přímka l a rovina ρ. $A \notin l$, $A \notin \rho$, l a ρ jsou mimoběžné. Sestrojte přímku p takovou, že

(1) $A \in p$

(2) $p \cap l \neq \emptyset$

(3) $p \cap \rho \neq \emptyset$

Při řešení postupujeme stejně jako v předchozí úloze.

Vezme $\alpha = A \sqcup l$.

Spočítáme $\alpha \cap \rho = \{B\}$

Pak $p = \overleftrightarrow{AB}$

$$p : A + t(B - A)$$

U, V vekt. prostory. Víme, co je lineární zobrazení $\varphi : U \to V$

$\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou afinní podprostory v U a ve V.

Zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ nazveme afinní, jestliže je tvaru

$$\Phi(M + u) = N + \varphi(u)$$

kde $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$ a $\varphi : Z(\mathcal{M}) \to Z(\mathcal{N})$ je lineární zobrazení.

Příklad: $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$\Phi(x) = N + A \cdot x,$$ kde $N \in \mathbb{R}^k$ a A je matice $k \times n$.

$Z(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, $Z(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$ $\quad \varphi(x) = Ax$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární

Bilineární a kvadratické formy

Lineární forma na vektorovém prostoru U nad $\mathbb{K}$ je lineární zobrazení

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\sum a_i x_i$$

Příklad bilineární formy $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots\dots a_{ij}x_iy_j + \dots a_{nn}x_ny_n$$

Toto zobrazení je lineární v x, lineární v y, proto ho nazýváme bilineární.

Definice Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ nazveme bilineární formou, jestliže

(1) $f(au_1 + bu_2, v) = a f(u_1, v) + b f(u_2, v)$ $\quad$ f je lineární v 1. složce

(2) $f(u, av_1 + bv_2) = a f(u, v_1) + b f(u, v_2)$ $\quad$ f je lineární ve 2. složce

Hlavní příklad je uveden před definicí.

Další příklady

2) $U = \mathbb{R}_n[x]$ $f : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$

$$f(p,q) = p(1) \cdot q'(2)$$

f je bilineární

3) $U = C[a,b]$ $F : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(p,q) = \int_a^b p(x)\,q(x)\,dx$$

$p, q \in C[a,b]$

Matice bilineární formy $f: U \times U \to K$ **v bázi** α prostoru U

$\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ Matice bilineární formy f v bázi α je matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, kde

$$a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Pomocí matice bilin. formy v bázi můžeme spočítat bilineární formu pomocí souřadnic.

$u, v \in U$
$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$$
$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

souřadnice u a v v bázi α

Matice f v bázi α je $A = (a_{ij})$

Potem

$$f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i , \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, f\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \; f(u_i, u_j)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{f(u_i,u_j)}_{a_{ij}} x_i y_j = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j}_{\text{Ta smo imeli v 1. primeru}}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum x_i a_{i1}, \sum x_i a_{i2}, \dots, \sum x_i a_{in}\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i1} y_1 + \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i2} y_2 + \dots + \sum_{i=1}^{m} x_i a_{in} y_n = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

$$= x^T A y$$

Ukázali jsme, že pro matici bilin. formy platí

$$f(u,v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$$

Matice bilineární formy v různých bázích

Vekt. prostor U s bázemi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$
$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

matice bil. formy f v bázi α nechť je A

Matice ——— // ——— v bázi β nechť je B

13

$u, v \in U$ $\qquad (u)_\alpha = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (v)_\alpha = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

souřadnice v bázi α

Souřadnice v bázi β $\qquad (u)_\beta = \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \qquad (v)_\beta = \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$

Platí

$$f(u, v) = x^T A y = \bar{x}^T B \bar{y}$$

Chceme vyjádřit jednu matici pomocí druhé.

Nechť P je matice přechodu $\qquad x = P\bar{x}$

$P = (id)_{\alpha\beta} \qquad y = P\bar{y} \qquad (*)$

Počítáme:

14

dosadíme z (*)

$$f(u,v) = \underline{\bar{x}^T B \bar{y}} = x^T A y = (P\bar{x})^T A (P\bar{y}) =$$

$$= (\bar{x}^T \cdot P^T) A (P\bar{y}) = \underline{\bar{x}^T (P^T A P) \bar{y}}$$

Odtud plyne (dokážeme později), že

$$B = P^T A P$$

a to je hledaný transformační vztah

$$B = (id)_{\alpha\beta}^T A (id)_{\alpha\beta}$$

Lemma Nechť C a D jsou matice $n\times n$ nad $\mathbb{K}$ a nechť pro vektory $x, y \in \mathbb{K}^n$ platí

$$x^T C y = x^T D y .$$

Pak $C = D$.

Důkaz: Pro $x = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i-té místo a $y = e_j$

dostaneme, že

$$e_i^T C e_j = e_i^T D e_j .$$

Spočteme obě strany

$$e_i^T C e_j = (c_{i1}\ c_{i2} \dots c_{in}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_{ij}$$ ← j-té místo

$$e_i^T D e_j = d_{ij}$$

16

Dokážeme $c_{ij} = d_{ij}$, tedy $C = D$.

Čtvercové matice C a D, pro které platí

$$D = P^T C P$$

pro nějakou regulární matici P (reg. matice má $\det \neq 0$, tedy má inverzní matici) se nazývají KONGRUENTNÍ.

Kongruence matic je relace ekvivalence

(1) C je kongruentní s C

(2) je-li C kongruentní s D, je D kongruentní s C

(3) Je-li C kongruentní s D, D kongruentní s F, je C kongruentní s F.

17

Definice Bilineární forma $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je symetrická, jestliže platí $(\forall u, v \in U)$ $f(u,v) = f(v,u)$.

Lemma: Bilineární forma $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je symetrická právě když její matice A v bázi α je symetrická.

Důkaz: f symetrická, $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji}.$$

Obráceně: Nechť A je symetrická. Potom

$$f(u,v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha = \left((u)_\alpha^T A (v)_\alpha\right)^T$$

$$= (v_\alpha)^T \underset{\substack{\| \\ A}}{A^T} \left((u)_\alpha^T \right)^T = (v)_\alpha^T \, A \, (u)_\alpha = f(v, u).$$