KVADRATICKÉ FORMY NAD $\mathbb{R}$

Kvadr. forma $q: U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(u) = f(u,u)$$

kde $f: U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ je bilineární.

Minule: Pro každou kvadr. formu q existuje báze v U taková, že v souřadnicích této báze je

$$q(u) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

Sylvestrův zákon setrvačnosti. Nechť $q: U \to \mathbb{R}$ je reálná kvadr. forma. Pak v U existují báze, v jejíž souřadnicích lze psát

2

$$q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_q^2 + 0 \cdot x_{q+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2$$

kde $x_1, x_2, \dots x_n$ jsou souřadnice vektoru u.

Přitom počet koeficientů 1, -1 a 0 nezávisí na volbě báze (to je ta „setrvačnost").

Díky této větě můžeme definovat:

Signatura (s_+, s_-, s_0) kvadr. formy q je trojice nezáporných celých čísel, kde s_+ je počet 1, s_- počet -1 a s_0 počet 0 ve vyjádření kvadr. formy ve výše uvedeném tvaru.

Důkaz věty: Najdeme bázi $(v_1, v_2, \ldots v_n)$, v níž je

$$q(u) = \sum a_{ii} y_i^2$$

Jestliže $a_{ii} > 0$, položíme $x_i = \sqrt{a_{ii}}\, y_i$.

Pak $a_{ii} y_i^2 = x_i^2$. V bázi vektor v_i nahradíme vektorem $u_i = \dfrac{v_i}{\sqrt{a_{ii}}}$.

Jestliže $a_{jj} < 0$, položíme $x_j = \sqrt{-a_{jj}}\, y_j$

pak

$$a_{jj} y_j^2 = -(-a_{jj}) y_j^2 = -\left(\sqrt{-a_{jj}}\, y_j\right)^2 = -x_j^2$$

a zase položíme $u_j = \dfrac{v_j}{\sqrt{-a_{jj}}}$

$a_{kk} = 0$ ponecháme $u_k = v_k$.

Když změníme pořadí, dosáhneme toho, že

$$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_q^2 + 0 \cdot x_{q+1}^2 + \dots 0 \cdot x_n^2$$

<u>Důkaz jednoznačnosti:</u> Nechť

$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots \dots$ v bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$

$q(u) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots \dots$ v bázi $\beta = (v_1, \dots, v_n)$

Předp. že $p > s$. Uvažujme podprostor

$W = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ $\quad w \in W \setminus \{0\}$ $q(w) > 0$

$V = [v_{s+1}, \dots, v_n]$ $\quad v \in V$ $q(v) \leq 0$

Spočítáme dimenzi $W \cap V$.

5

$$\dim(W \cap V) = \dim W + \dim V - \underbrace{\dim(W+V)}_{\leq n}$$

$$\geq p + n - s - n$$

$$= p - s \geq \underline{1}$$

Tedy existuje vektor $u \neq \vec{o}$ takový, že $u \in W \cap V$

Pak ale

$$q(u) > 0 \quad \text{neboť } u \in W \setminus \{\vec{o}\}$$

a zároveň

$$q(u) \leq 0 \quad \text{neboť } u \in V, \text{ spor.}$$

Tedy musí být $p \leq s$. Stejně dokážeme, že $s \leq p$,

tedy $p = s$.

Signatura (reálné) symetrické matice A řádu $n \times n$ je signatura příslušné bilin. formy

$$q(x) = (x)^T A x \qquad q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Platí pro signaturu (s_+, s_-, s_0)

$$s_+ + s_- + s_0 = n$$

$$s_+ + s_- = h(A)$$

Jestliže A zadává kvadr. formu q se signaturou (s_+, s_-, s_0) pak

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = P^T A P \qquad h(A) = h(P^T A P) = h(D)$$

$$= s_+ + s_-$$

Kritérium kongruence symetrických reálných matic

A je kongruentní s B, jestliže

$$B = P^T A P \text{ pro nějakou reg. matici } P.$$

Kritérium Reálné sym. matice A a B jsou kongruentní, právě když mají stejné signatury.

Dk: Nechť A je kongruentní s B. Pak A i B jsou kongruentní s jedinou maticí $D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

Tedy musí mít stejnou signaturu určenou maticí D.

Jestliže A i B mají stejnou signaturu, jsou kongruentní se stejnou diag. maticí D a tudíž z tranzitivity je

A kongruentní s B.

Speciální kvadr. formy

$q : V \longrightarrow \mathbb{R}$

positivně definitní $\forall u \neq \vec{0} \quad q(u) > 0$ $\qquad s_+ = n,\ s_- = s_0 = 0$

negativně definitní $\forall u \neq \vec{0} \quad q(u) < 0$ $\qquad s_- = n,\ s_+ = s_0 = 0$

pozitivně semidefinitní $\forall u \quad q(u) \geq 0$ $\qquad s_- = 0$

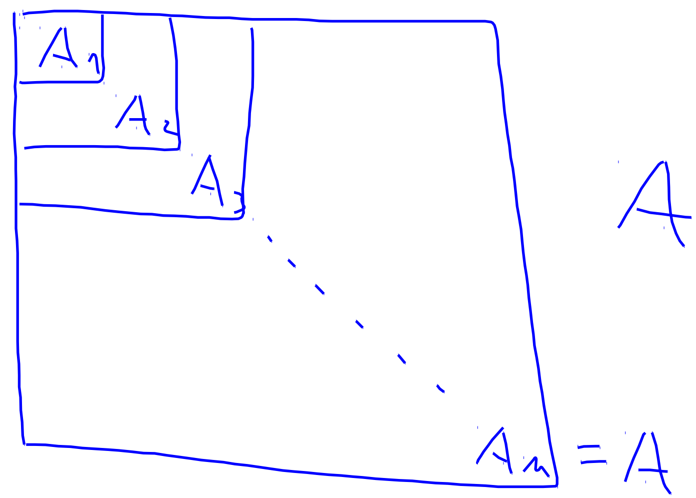
negativně semidefinitní $\forall u \quad q(u) \leq 0$ $\qquad s_+ = 0$

indefinitní $\exists u \ q(u) > 0$, $\exists v \ q(v) < 0$ $\qquad s_+ > 0,\ s_- > 0$

Sylvestrovo kritérium

Nechť q je kvadratická forma zadaná maticí A typu $n \times n$.

Hlavní minory matice A jsou $\det A_i$



Kritérium

Jestliže všechny hlavní minory matice A jsou kladné pak je příslušná kvadr. forma pozitivně definitní.

$$\det A_1 > 0,\ \det A_2 > 0,\ \dots\ \det A_n = \det A > 0.$$

$$\left(q(x) = x^T A x > 0 \text{ pro } x \neq \vec{0} \right)$$

(Platí i obrácená implikace)

Demonstrace:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ je pozitivně definitní.

$\det A_1 = 1 = \det A_2 = \det A_3 \dots = \det A$

Jestliže platí

$$\det A_1 < 0,\ \det A_2 > 0,\ \det A_3 < 0, \dots (-1)^n \det A_n > 0$$

pak je příslušná kvadr. forma negativně definitní.

(Platí i obrácená implikace)

Demonstrace:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

$$\det(-1) = -1$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

<u>Příklad</u>: $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\det A_1 = 3$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$

$\det A_3 = 21 - 4 - 7 = 10 > 0$

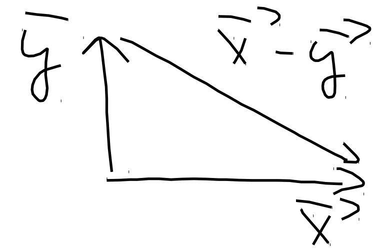
q je pozitivně definitní

13

Vektorové prostory se skalárním součinem

Motivace ze střední školy

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou na sebe kolmé, jestliže na příslušný $\triangle$



platí Pythagorova věta.

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2$$

$$\text{——}\,\|\,\text{——} = x_1^2 + y_1^2 \underline{-2x_1y_1} + x_2^2 + y_2^2 \underline{-2x_2y_2}$$

Odtud dostáváme

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

Nazveme-li $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

skalárním součinem, pak bude platit

$$\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \| \vec{x} \|$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \text{ právě když } \vec{x} \perp \vec{y}$$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ takto definovaná je sym. bilin. forma.

Navíc příslušná kvadr. forma $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ je pozitivně definitní.

Vezmeme tyto vlastnosti a definujeme abstraktní skalární součin na reálném vekt. prostoru jinou pomocí těchto vlastností:

Skalární součin na reálném vekt. prostoru U je zobrazení $\langle \ , \ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

(1) $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$

(2) $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$

(3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

je to symetrická bilin. forma

(4) $\forall u \neq \vec{0} \quad \langle u, u \rangle > 0$

příslušná kvadr. forma je pozitivně definitní

Příklady

1. $U = \mathbb{R}^n$, stand. skalární součin

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

2. $U = \mathbb{R}^3$

$$\langle x, y \rangle = 3x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + 7x_3 y_3$$

sym. bilin. forma, podle příkladu na Syl. kritérium je pozitivně definitní

3. $U = C[a,b]$ spojité funkce na $[a,b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

je sym. bilin. forma

$f \neq 0$ $\quad \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\, dx > 0$

V prostorech se skalárním součinem můžeme definovat

NORMU VEKTORU $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

s vlastností $\|\vec{u}\| = 0 \iff u = \vec{o}$.

KOLMOST DVOU VEKTORŮ

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle u, v \rangle = 0.$$

20

Skalární součin na kompl. vekt. prostorech

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení

$$\langle \, , \, \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$$

se nazývá skalární součin, jestliže platí:

(1) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$

(2) $\langle u, av + bw \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle + \bar{b} \langle u, w \rangle$ kde $\bar{a}, \bar{b}$ jsou kompl. sdružená čísla

(3) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

Z (3) plyne $\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$, tedy máme $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$

(4) $\forall u \neq \vec{0} \quad \langle u, u \rangle > 0$.

Příklady

1. $U = \mathbb{C}^n$ stand. skal. součin

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

x_i, y_i jsou kompl. čísla, pruh označuje čísla kompl. sdružené

$$z = a + ib \qquad z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

$$\overline{z} = a - ib \qquad z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$\langle x, x \rangle = x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \dots + x_n \overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$$

pro $x \neq \vec{0}$

(20)

$$\langle x, ay\rangle = x_1 \overline{a y_1} + x_2 \overline{a y_2} + \dots$$
$$= x_1 \bar{a} \bar{y}_1 + x_2 \bar{a} \bar{y}_2 + \dots$$
$$= \bar{a} x_1 \bar{y}_1 + \bar{a} x_2 \bar{y}_2 + \dots = \bar{a} \langle x, y\rangle$$

(2) Nechť $C(\langle a,b\rangle, \mathbb{C})$ jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$ s hodnotami v kompl. číslech

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx > 0$$

pro $f \not\equiv 0$.

Díky vlastnosti (4) i v kompl. prostoru definujeme normu vektoru

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

vektory u, v jsou kolmé, jestliže

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Od této chvíle pracujeme ve vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$, kde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. V $\mathbb{R}$ platí $\bar{a} = a$.

Cauchyova nerovnost

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem. Potom platí

22

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\| \quad \text{pro všechny } u,v \in U.$$

Rovnost nastane právě když u a v jsou lineárně závislé.

Aplikace pro různé skalární součiny

1. $U=\mathbb{R}^n$, $\langle\ \ \rangle$ stand. skal. součin

$$x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \le \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\,\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$$

2. $U=C[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

Důkaz nad reálnými čísly

Jestliže $v = \vec{o}$ pak v nerovnosti platí rovnost a $u, \vec{o}$ jsou lin. závislé. Věta platí.

Nechť $\vec{v} \neq \vec{o}$. Uvažujme vektory $u - tv$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$0 \le \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv \rangle = \langle u, u \rangle - t\langle v, u \rangle$$

$$- t\langle u, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle = t^2 \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + \|u\|^2$$

= kvadratická funkce v proměnné t

a taková kvadr. funkce je pro všechna $t \in \mathbb{R}$ větší nebo rovna 0. Tedy její diskriminant D je ≤ 0.

$$D = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

Tím je nerovnost dokázána.

Kdy nastane rovnost, právě když $D = 0$, tj. právě když existuje t, které je kořenem kvadr. rovnice, tj.

$$0 = \|u - tv\| \iff u - tv = \vec{0}$$

$$u = tv$$

Právě když u, v jsou lin. závislé.