Prostory se skal. součinem

V je vekt. prostor se skal. součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Norma vektoru $\quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

Vektory u, v jsou kolmé

$$\langle u, v\rangle = 0$$

Cauchyova nerovnost

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\|v\|$$

dává, že

$$-1 \le \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \le 1$$

existuje $\alpha \in [0, \pi]$

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Odchylka vektorů u a v.

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou <u>ortogonální</u>, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j.$$

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou <u>ortonormální</u>, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (\|u_i\| = 1)$$

<u>Lemma</u>: Jsou-li vektory $u_1 \dots u_k$ ortogonální a nenulové, jsou lineárně nezávislé.

<u>Dk</u>: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \vec{0}$ skalárně vynásobíme vektorem u_j

$$\sum a_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\substack{= 0 \ i \neq j \\ \neq 0 \ i = j}} = \langle \vec{0}, u_j \rangle = 0$$

$$\Rightarrow a_j \|u_j\|^2 = 0 \Longrightarrow a_j = 0$$

Grammův - Schmidtův ortogonalizační proces

je jednoznačně určený algoritmus, který lin. nezávislým vektorům $u_1, u_2, \dots u_k$ přiřadí ortogonální vektory $v_1, v_2, \dots$ $\dots v_k$ s vlastnostmi

$$[u_1, \dots u_j] = [v_1, \dots, v_j] \quad \text{pro } 1 \le j \le k$$

přitom $v_1, \dots v_k$ hledáme takto:

$$v_1 = u_1$$

$$v_{\ell+1} = u_{\ell+1} - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_\ell v_\ell$$

přitom koeficienty $a_1, a_2, \dots a_\ell$ volíme tak, aby $v_{\ell+1}$ byl kolmý na $v_1, v_2, \dots v_\ell$

$$0 = \langle v_{\ell+1}, v_1 \rangle = \langle u_{\ell+1}, v_1 \rangle - a_1 \langle v_1, v_1 \rangle - a_2 \underset{0}{\underset{\|}{\langle v_2, v_1 \rangle}} - \underset{0}{\underset{\|}{\dots}}$$

odtud $$a_1 = \frac{\langle u_{k+1}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

Podobně spočítáme další koeficienty.

<u>Příklad</u> V $\mathbb{R}^3$ $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,2,0)$, $u_3 = (1,1,2)$

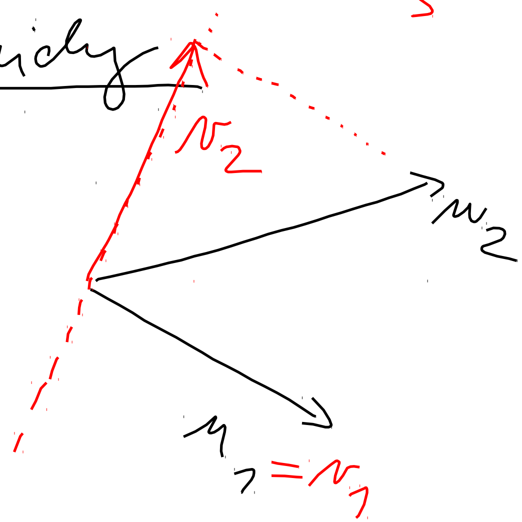
Najděte v_1, v_2, v_3.

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - a v_1$$

$$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2$$

<u>Geometricky</u>



Ortonormální báze prostoru U je báze tvořená systémem ortonormálních vektorů:

$(u_1, u_2, \dots u_n)$ báze + $\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Věta: V každém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

Dk: Nechť $(u_1, u_2, \dots u_n)$ je nějaká báze v U. Pustíme na ni GS ortogonalizační proces. Dostaneme systém n ortogonálních vektorů $v_1, v_2, \dots v_n$, které jsou LN a tvoří bázi. Potom vektory

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \quad \dots, \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

tvoří ortonormální bázi.

$$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\|v_i\|^2} \langle v_i, v_i \rangle} = \sqrt{\frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2}} = 1$$

<u>Ortogonální doplněk</u> Jsme v prostoru U a máme podprostor $V \subseteq U$. Ortogonální doplněk prostoru V v U je množina

$$V^{\perp} = \{ u \in U : \forall v \in V, \langle u, v \rangle = 0 \}$$

$V^{\perp}$ je vekt. podprostor.

$$u_1, u_2 \in V^{\perp}, \quad v \in V$$

$$\langle a u_1 + b u_2, v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u_2, v \rangle = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

Odtud $a u_1 + b u_2 \in V^{\perp}$.

<u>Věta:</u> $$V \oplus V^{\perp} = U$$

<u>Důkaz:</u> Součet je direktní: $V \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\}$

$u \in V \cap V^{\perp} \qquad u \in V, \ u \in V^{\perp}$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = \vec{0}.$$

Součet je U

Nechť V má ortonormální bázi $v_1, v_2, \dots v_k$. Tu lze doplnit na ortonormální bázi $v_1, v_2, \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n$ celého U.

Protože $v_{k+1}, \dots v_n \perp v_1, v_2, \dots v_k$ je $v_{k+1}, \dots v_n \in V^\perp$.

A každý vektor z U lze psát

$$u = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k}_{\in V} + \underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in V^\perp}$$

$$\Longrightarrow \quad U = V + V^\perp.$$

Kolmá projekce na podprostor je lineární zobrazení

$$P : U \longrightarrow V \qquad V \subseteq U$$

takové, že

$$(*) \qquad Pu \in V, \quad u - Pu \in V^\perp$$

$$u = \underbrace{Pu}_{V^\ni} + \underbrace{(u - Pu)}_{\in V^\perp}$$

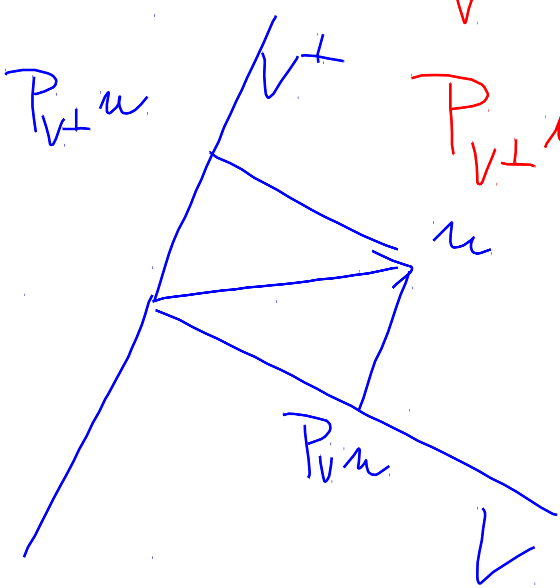
Vlastností (*) je zobrazení určeno jednoznačně.

Trochu jinak. Jestliže $U = V \oplus V^{\perp}$ tak, pro každé $u \in U$ existují právě jedna $v \in V$ a $w \in V^{\perp}$ tak, že

$$u = v + w$$

Definujeme $P_V u = v$ .... kolmá projekce na V

$P_{V^{\perp}} u = w$ .... kolmá projekce na $V^{\perp}$



9

Vyjádření kolmé projekce

Nechť $V = [v_1, v_2, v_3]$

jestliže v_1, v_2, v_3 jsou ortonormální, pak

$$Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$u - Pu \perp V \implies u - Pu \perp v_1, v_2, v_3$$

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_1 \rangle - a_1 \underset{\overset{\|}{1}}{\langle v_1, v_1 \rangle} - a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} - a_3 \underbrace{\langle v_3, v_1 \rangle}_{=0} = 0$$

$$Pu = \langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \langle u, v_3 \rangle v_3 \qquad a_1 = \langle u, v_1 \rangle.$$

10

Nechť v_1, v_2, v_3 nejsou ortonormální, pak

$$Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$u - Pu \perp V \implies u - Pu \perp v_1, v_2, v_3$$

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 , v_1 \rangle = 0$$

$$v_2 \rangle = 0$$

$$v_3 \rangle = 0$$

Dostáváme 3 rovnice o třech neznámých s maticí

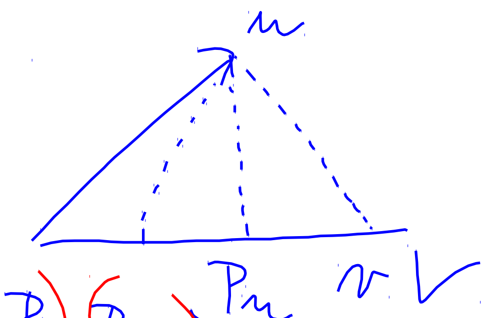
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_3, v_1 \rangle & \langle u, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle u, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle & \langle u, v_3 \rangle \end{array} \right)$$

Věta: Vlastnost kolmé projekce

Nechť V je vekt. podprostor v U, nechť $u \in U$ a Pu jeho kolmá projekce do V.

Pu je jediný vektor z V, který minimalizuje vzdálenost $\|u-v\|$ pro vektory $v \in V$.

$$\|u - Pu\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$



Důkaz: $v \in V$ libovolné

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle (u-Pu)+(Pu-v), (u-Pu)+(Pu-v)\rangle$$

$$= \langle u-Pu, u-Pu\rangle + \langle Pu-v, Pu-v\rangle$$

$$+ \overset{0}{\langle \underbrace{u-Pu}_{V\perp}, \underbrace{Pu-v}_{V}\rangle} + \overset{0}{\langle \underbrace{Pu-v}_{V}, \underbrace{u-Pu}_{V\perp}\rangle} = \|u-Pu\|^2 + \|Pu-v\|^2$$

Daný výraz nabývá svého minima právě když $P_M - v = \vec{O}$, tj. pro $v = P_M$.

Eukleidovská geometrie

U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem

Vzdálenost dvou bodů $A, B \in U$ je

$$\mathrm{dist}(A,B) = \| A - B \|$$

$\mathcal{M}$ je afinní podprostor, A je bod

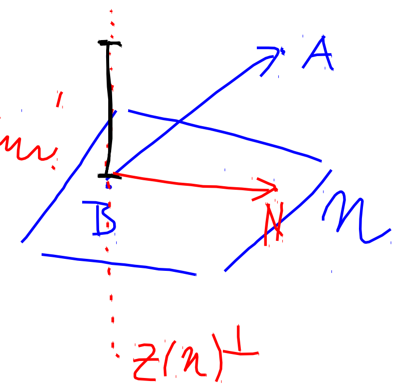
$$\mathrm{dist}(A,\mathcal{M}) = \inf_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{dist}(A,M) = \inf_{M \in \mathcal{M}} \| A - M \|$$

$\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ afinní podprostory, definujeme vzdálenost

$$\mathrm{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \mathrm{dist}(M,N) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \| M - N \|$$

Výpočty provádíme pomocí kolmých projekcí.

Věta: (a) Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti vektoru kolmé projekce vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{N})^{\perp}$.



(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro bod $N \in \mathcal{N}$.

(1) $\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|A - N\|$

(2) $A - N \perp Z(\mathcal{N})$

(3) $N = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)$

Dk (a) $X \in \mathcal{N}$ $\quad X = B + u, \quad u \in Z(\mathcal{N})$

$$\|A - X\| = \|A - B - u\| \underset{\text{předch. věta}}{\geq} \|A - B - P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)\| = \|P_{Z(\mathcal{N})^{\perp}}(A-B)\|$$

Dk (b) $\quad N = B + u$

$\|A - N\| = \|(A-B) - u\|$ nabývá minima pro $u = P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$

Odtud $N = B + u = B + P_{Z(n)}(A-B)$ tj (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) $\quad A - N = A - B - P_{Z(n)}(A-B) = P_{Z(n)^\perp}(A-B) \perp Z(n)$

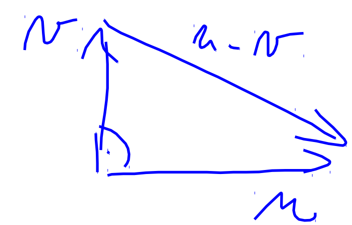
(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad u \in Z(n)$ a platí $A - N \perp Z(n)$

$$\|\underbrace{A-N}_{Z(n)^\perp} - \underbrace{u}_{Z(n)}\|^2 = \|A-N\|^2 + \|u\|^2 \geq \|A-N\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{dist}(A, n) = \|A-N\|$$

V důkazu jsme použili Pythagorovu větu:
Jestliže $u \perp v$ pak



$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0} = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Příklad V $\mathbb{R}^4$ se stand. skal. součinem spočtěte vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny $\mathcal{N} = \{y \in \mathbb{R}^4,$

$$ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 + e = 0\}$$

kde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$.

Podle předchozí věty je $\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A - B) \|$

Předp. že $d \neq 0$. Pak lze volit

$$B = \left(0, 0, 0, -\frac{e}{d}\right)$$

$Z(\mathcal{N})$: $ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$

$Z(\mathcal{N}) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4,$ splňující rovnici$\}$

$$n = (a, b, c, d) \perp Z(\mathcal{N})$$

$$\langle n, y \rangle = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$$

$$Z(n)^{\perp} = [u = (a, b, c, d)]$$

Počítáme kolmou projekci $A - B = \left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d}\right)$ do $Z(n)^{\perp}$

$$P_{Z(n)^{\perp}}(A - B) = \alpha \cdot u \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$A - B - P(A - B) \perp u$$

$$\langle A - B - \alpha u, u \rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle A - B, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{dist}(A, n) = \| \alpha u \| = |\alpha| \, \|u\| = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

Vzdálenost dvou afinních podprostorů

Nechť $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$, $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ jsou dva afinní podprostory.

Věta: (a) Vzdálenost podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $\left(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})\right)^{\perp}$.

(b) Pro body $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující podmínky ekvivalentní

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \|M-N\|$

(2) $M-N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M-N = P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^{\perp}}(A-B)$

Důkaz (a)

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \operatorname{dist}\left(A+Z(\mathcal{M}), B+Z(\mathcal{N})\right) = \operatorname{dist}\left(A, B+Z(\mathcal{N})+Z(\mathcal{M})\right)$$

podle předch. věty

$$= \left\|P_{(Z(\mathcal{N})+Z(\mathcal{M}))^{\perp}}(A-B)\right\|$$

r (1) $\Rightarrow$ (3) $M = A + u$, $N = B + v$

$\|M - N\| = \|A - B + \underbrace{u - v}_{Z(m) + Z(n)}\|$ nabývá minima pro $u - v = P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$

Aby velikost $\|M - N\|$ byla minimální, musí být

$$M - N = A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

tj. (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) $M - N = P_{Z(n)+Z(n)^\perp}(A-B) \in (Z(m)+Z(n))^\perp$

$$\Rightarrow M - N \perp Z(m) + Z(n)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) nechť $M - N \perp Z(m) + Z(n)$, $u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$

$$\|M + u - (N + v)\|^2 = \|\underset{(Z(m)+Z(n))^\perp}{\underset{\cap}{(M - N)}} + \underset{Z(m)+Z(n)}{\underset{\cap}{(u - v)}}\|^2 = \|M - N\|^2 + \|u - v\|^2 \geq \|M - N\|^2$$

Vzdálenost m a n se realizuje v bodech M a N.