ORTONORMÁLNÍ BÁZE

Každý prostor U se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ má ortonormální bázi.

Věta Nechť U je nekt. prostor nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ se skalárním součinem. Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormální báze. Potom

(1) souřadnice vektoru v v bázi α jsou

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \langle v, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{pmatrix}$$

(2) Jsou-li u a v dva vektory takové, že $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

pak $\langle u, v \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$,

kde $\overline{y_i}$ je komplexně sdružené číslo (pro $y_i \in \mathbb{R}$ je $\overline{y_i} = y_i$).

<u>Důsledek</u>: Každý vektorový prostor U nad $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) konečné dimenze je isomorfní vektorovému prostoru $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) se stand. skalárním součinem. Pro isomorfismus $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (resp $\mathbb{R}^n$) platí

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle u, v \rangle_U$$

Pomocí (2) můžeme tedy pro zvolenou ortonormální bázi definovat

$$\varphi(u) = (u)_\alpha \qquad \text{Pak } \langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

Důkaz věty:

① Nechť $v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \quad \Big| \cdot u_1$

$$\langle v, u_1\rangle = y_1 \underbrace{\langle u_1, u_1\rangle}_{=1} + y_2 \underbrace{\langle u_2, u_1\rangle}_{=0} + \dots + y_n \underbrace{\langle u_n, u_1\rangle}_{=0}$$

$\langle v, u_1\rangle = y_1$ Analogicky dostaneme $y_i = \langle v, u_i\rangle$

② Nechť $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$

$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \langle u_i, u_j\rangle$$

$$\langle u_i, u_j\rangle = 1 \quad i=j, \qquad \langle u_i, u_j\rangle = 0 \quad i \neq j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Zpět k eukleidovské geometrii

ODCHYLKY AFINNÍCH PODPROSTORŮ

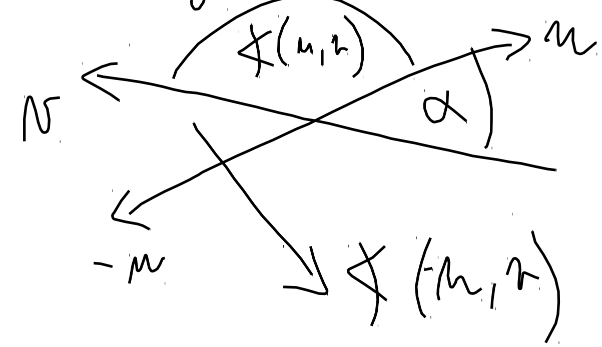
Věta: Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem a V nějaký jeho podprostor. Nechť $u \in U$ je libovolný a Pu je kolmá projekce vektoru u do podprostoru V. Potom

Pu je až na násobek jediný vektor z V s vlastností

$$\frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \max_{v \in V} \frac{|\langle v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|}$$

$$\left(\begin{array}{l} \measuredangle(u,v) \in [0,\pi] \\ \cos \measuredangle(u,v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \end{array} \right)$$

Poznámka: Odchylka dvou nenulových vektorů u a v je úhel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takový, že $\cos \alpha = \dfrac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$



Důkaz věty:

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\langle \underset{\in V}{Pu} + \underset{\in V^\perp}{(u-Pu)}, \underset{\in V}{v}\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \overset{\text{Cauch. nerovnost}}{\leq}$$

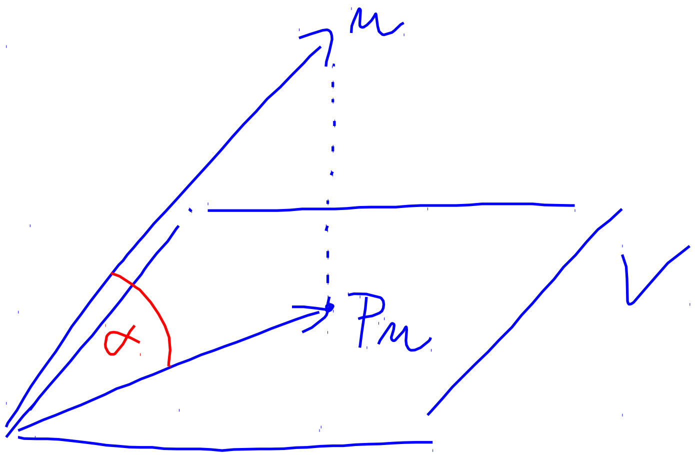
$$\leq \frac{\|Pu\|\,\|v\|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

rovnost nastane právě když v je násobkem Pu.

Definice: Odchylka přímky určené vektorem u od podprostoru V je úhel $\sphericalangle([u], V) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takový, že

$$\sphericalangle([u], V) = \min \sphericalangle([u], [v])$$

Podle předchozí věty je $\cos \sphericalangle([u], V) = \dfrac{\|Pu\|}{\|u\|}$



$$\cos\alpha = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

Definice (odchylka dvou podprostorů V a W)

① nechť $V \cap W = \{\vec{o}\}$. Pak

$$\measuredangle(V, W) = \min_{\substack{v \in V \setminus \{o\} \\ w \in W \setminus \{o\}}} \measuredangle([v], [w])$$

② jestliže $V \cap W \neq \{\vec{o}\}$, pak

$$\measuredangle(V, W) = \underbrace{\measuredangle\left(V \cap (V \cap W)^{\perp}, W \cap (V \cap W)^{\perp}\right)}_{\text{jsme v situaci ①}}$$

neboť

$$\left(V\cap(V\cap W)^{\perp}\right)\cap\left(W\cap(V\cap W)^{\perp}\right)=(V\cap W)\cap(V\cap W)^{\perp}=\{0\}$$

3 Definice odchylky dvou afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je

$$\sphericalangle(\mathcal{M},\mathcal{N})=\sphericalangle\left(Z(\mathcal{M}),Z(\mathcal{N})\right)$$

<u>Příklad</u> $U=\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{M}=(3,0,1,2)+[e_1+e_2,\,e_1+e_2+e_3]$$

$$\mathcal{N}=(2,3,4,5)+[e_2+e_4,\,e_2+e_3+e_4]$$

$$Z(\mathcal{M})\cap Z(\mathcal{N})=[e_3] \qquad \left(Z(\mathcal{M})\cap Z(\mathcal{N})\right)^{\perp}=[e_1,e_2,e_4]$$

$$Z(\mathcal{M})\cap\left(Z(\mathcal{M})\cap Z(\mathcal{N})\right)^{\perp}=[e_1+e_2]$$

(8)

$$Z(n) \cap \left(Z(m) \cap Z(n)\right)^{\perp} = \overline{[e_2 + e_4]}$$

$$\measuredangle(m, n) = \measuredangle\left(Z(m), Z(n)\right) = \measuredangle\left([e_1+e_2], [e_2+e_4]\right) = \alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|\langle e_1+e_2, e_2+e_4\rangle|}{\|e_1+e_2\| \, \|e_2+e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

Odchylka je $\frac{\pi}{3}$.

(9) VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

Lineární operátor (transformace, endomorfismus) je lineární zobrazení φ z vekt. prostoru U do téhož prostoru U.

$$\varphi : U \to U.$$

Invariantní podprostor lin. operátoru $\varphi : U \to U$ je vekt. podprostor $V \subseteq U$ takový, že $\varphi(V) \subseteq V$.

Triviální invariantní podprostory jsou $\{\vec{o}\}$ a U.

$\varphi(\vec{o}) = \vec{o} \Rightarrow \varphi(\{\vec{o}\}) = \{\vec{o}\}$ $\qquad$ $\varphi(U) \subseteq U$ je zřejmé.

Příklad $\quad U = \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$V = \left[\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}} \right]$ je invariantní:

$$\varphi(v_1) = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \in V$$

$$\varphi(v_2) = A \cdot v_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \in V$$

$$\varphi(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 \underset{\overset{\Uparrow}{V}}{\varphi(v_1)} + a_2 \underset{\overset{\Uparrow}{V}}{\varphi(v_2)} \in V$$

Skutečně $\varphi(V) \subseteq V$.

Matice lin. zobrazení v bazích α a β

$$\varphi : \underset{\alpha}{U} \longrightarrow \underset{\beta}{Z} \qquad \alpha = (u_1, \dots u_n)$$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta (\varphi(u_2))_\beta, \dots \right)$$

$$\varphi : \underset{\alpha}{U} \longrightarrow \underset{\alpha}{U}$$

Matice operátoru φ v bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha, (\varphi(u_2))_\alpha, \dots, (\varphi(u_n))_\alpha \right)$$

nezbytně nutné znát a ovládat k ústní zkoušce

K předchozímu příkladu

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = A\,x$

$\varepsilon = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ stand. báze

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \left((A\cdot e_1)_\varepsilon, (A\cdot e_2)_\varepsilon, (A\cdot e_3)_\varepsilon, (A\cdot e_4)_\varepsilon \right) =$$

$$= \left((s_1 A)_\varepsilon, (s_2 A)_\varepsilon, (s_3 A)_\varepsilon, (s_4 A)_\varepsilon \right) = (s_1 A, s_2 A, s_3 A, s_4 A)$$

$$= A$$

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $V = \left[v_1 = e_1, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Báze $B = [v_1, v_2, e_3, e_4]$

$$(\varphi)_{B,B} = \left((\varphi(v_1))_B, (\varphi(v_2))_B, (\varphi(e_3))_B, (\varphi(e_4))_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = v_1 + 2v_2 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(v_2) = -2v_1 + v_2 = (-2) v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + 4e_3 - e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -3v_1 + 2v + 1 \cdot e_3 \cdot 4e_4$$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ a $V \subseteq U$ je inv. podprostor. Nechť $v_1, \dots, v_k$ je báze V a nechť $B = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze celého U. Pak

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \underbrace{\qquad}_{k}\ \underbrace{\qquad}_{n-k} & \end{array}$$

$$(\varphi)_{B,B} = \left((\varphi(v_1))_B, \dots \right) =$$

$$\varphi(v_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{k1} v_k$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & \\ \vdots & \\ a_{k1} & \dots \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Pokračování příkladu

$\varphi : U \to U \qquad \varphi(x) = Ax$

$$V = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \right]$$

$$W = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} \right]$$

φ zúžení inv. podprostor

$$\varphi(w_1) = 4w_1 - w_2$$

$$\varphi(w_2) = 1 \cdot w_1 + 4w_2$$

$\alpha = (v_1, v_2, w_1, w_2)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \Big((\varphi(v_1))_\alpha \ (\varphi(v_2))_\alpha \ (\varphi(w_1))_\alpha \ (\varphi(w_2))_\alpha \Big) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ a V, W jsou dva inv. podprostory takové, že $U = V \oplus W$. Nechť $v_1 \dots v_k$ je báze V, $w_1 \dots w_{n-k}$ báze W. Pak v bázi $\alpha = (v_1 \dots v_k, w_1 \dots w_{n-k})$ prostoru U má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Zajímají nás především jednodimenzionální invariantní podprostory.

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podmnožina $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ je invariantní.

Jestliže $[v] \subseteq U$ je invariantní pro $\varphi : U \to U$ a $v \neq \vec{o}$, pak musí být

$$\varphi(v) = \lambda \cdot v \quad \text{pro nějaké } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Jiný nenulový vektor ve $[v]$ je $a \cdot v$

$$\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v) = a \cdot \lambda v = \lambda (a \cdot v)$$

φ omezená na jednorozměrný podprostor je násobení číslem z $\mathbb{K}$.

<u>Definice</u>: Vektor $v \in U$ <u>různý od $\vec{o}$</u> se nazývá <u>vlastním vektorem</u> operátoru $\varphi : U \to U$, jestliže existuje číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$\varphi(v) = \lambda \cdot v.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo lin. operátoru φ.

Výpočet vlastních čísel

λ je vlastní číslo $\iff$ rovnice $\varphi(u) = \lambda u$ má netriviální řešení $u \neq \vec{0}$

$\iff$ rovnice $\varphi(u) - \lambda u = \vec{0}$ má netriviální řešení

$\iff$ $(\varphi - \lambda\, id)(u) = \vec{0}$ má netriviální řešení

$\iff$ pro libovolnou bázi α platí, že rovnice $\big((\varphi - \lambda\, id)(u)\big)_\alpha = 0$ má netriviální řešení

$\iff$ $(\varphi - \lambda\, id)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha = 0$ má netriviální řešení

matice

sloupcový vektor

$\Longleftrightarrow \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda (id)_{\alpha,\alpha} \right) (u)_\alpha = 0$ má nulové řešení

$\Longleftrightarrow \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E \right) X = 0$ má nulové řešení

$\Longleftrightarrow (\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E$ nemá inverzní matici

$\Longleftrightarrow \det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E \right) = 0$

Závěr

λ je vlastní číslo operátoru $\varphi \Longleftrightarrow \lambda$ je kořenem rovnice $\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E \right) = 0$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) + \cdots\cdots$$

$$= (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots\dots + \underbrace{b_0}_{\det A}$$

$\det(A-\lambda E)$, kde A je matice $n\times n$, je polynom stupně n v proměnné λ, nazýváme ho charakteristický polynom.

<u>Věta:</u> λ je vlastní číslo lin. operátoru φ právě když je kořenem char. polynomu $\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)$.

<u>Příklad</u> $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Char. polynom. Zvolme bázi $\varepsilon = (e_1, e_2)$ $\quad (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(\lambda-3)+4 =$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Počítáme vl. vektory

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = t \end{matrix}$$

Všechny vl. vektory jsou $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.