VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

$\varphi : U \to U$ lin. operátor, U vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Nenulový vektor $u \in U$ se nazývá vlastní vektor operátoru φ, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ tak, že

$$\varphi(u) = \lambda u.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo operátoru φ.

Tvrzení: Vlastní číslo je kořenem charakteristického polynomu operátoru φ.

Char. polynom je $\quad \det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)$

α je nějaká báze v U a $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je matice operátoru φ v bázi α.

Tento polynom nezávisí na volbě báze α.

Pro dvě báze α a β platí tedy, že matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ a $(\varphi)_{\beta,\beta}$ jsou podobné

$$B = (\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$$

$$= P^{-1} (\varphi)_{\alpha,\alpha} P = P^{-1}AP$$

$$\det(B-\lambda E) = \det\left(P^{-1}AP-\lambda E\right) = \det\left(P^{-1}(A-\lambda E)P\right)$$

$$= \det P^{-1} \det(A-\lambda E) \det P$$

$$= \frac{1}{\det P} \cdot \det(A-\lambda E) \cdot \det P = \det(A-\lambda E)$$

Charakteristický polynom podobných matic je stejný.
Proto nezávisí na volbě báze pro matici lin. operátoru.

Vlastní čísla je kořen char. polynomu.

Když máme vl. číslo, pak výpočet vlastního vektoru, který přísluší tomuto vl. číslu je jednoduchý, jde o řešení homogenní soustavy rovnic:

$$\varphi(u) = \lambda u$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha = \lambda (u)_\alpha$$

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)(u)_\alpha = 0$$

$$(A - \lambda E)\, x = 0$$

Toto je homogenní soustava lin. rovnic.

Něco málo o kořenech polynomů

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{K}$$

má stupeň n.

U nulového polynomu o stupni buď nehovoříme nebo ho považujeme za $-\infty$.

Platí pro stupeň

$$\deg\left(p(x)\cdot q(x)\right) = \deg p(x) + \deg\left(q(x)\right)$$

Kořen polynomu je číslo $x_0 \in \mathbb{K}$ takové, že

$$p(x_0) = 0$$

<u>Věta:</u> $x_0 \in \mathbb{K}$ je kořenem polynomu $p(x) \not\equiv 0$ právě když

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x)$$

kde $\deg q = \deg p - 1$

Tvrzení Nechť $p(x) = \pm x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

kde $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ má racionální kořen.

Pak je tento kořen celé číslo, které dělí a_0.

Důkaz: $x_0 = \dfrac{c}{d}$ je kořen, $c \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ c, d nesoudělná

$$\pm \frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{c}{d} + a_0 = 0 \quad \Big/ \cdot d^n$$

$$\pm c^n + \underbrace{a_{n-1} d c^{n-1} + \dots + a_1 d^{n-1} c + a_0 d^n}_{\text{je násobek čísla } d} = \underbrace{0}_{\text{násobek čísla } d}$$

$\Rightarrow$ c^n je násobek čísla d, z nesoudělnosti plyne že $d = 1$.

Máme

$$\underbrace{\pm c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c}_{\text{je násobek čísla } c} + a_0 = 0$$

Tedy a_0 je násobek čísla c.

Při hledání vlastních čísel budou char. polynomy velmi často s celočíselnými koeficienty a kořeny pak budeme hledat mezi děliteli abs. členu a_0. Takových dělitelů je konečný počet.

<u>Příklad</u> $\varphi : R^3 \longrightarrow R^3$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Najděte vl. čísla a vlastní vektory.

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}}_{A-\lambda E} = (5-\lambda)^2(-4-\lambda) - 48 - 48$$

$$18(5-\lambda) + 16(5-\lambda) + 8(\lambda+4)$$

$$= (\lambda^2 - 10\lambda + 25)(-4-\lambda) - 96 + 90 - 18\lambda + 80 - 16\lambda + 8\lambda + 32$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda - 26\lambda - 100 + 106 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

8

Kořeny polynomu hledejme mezi děliteli čísla 6

$\pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

$x_0 = 1 \qquad p(1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Operátor má vl. čísla $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

Vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$.

$$A x = 1 \cdot x$$

$$(A - E) x = 0 \qquad\qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & +1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = p$ ✓

$x_3 = 2p$ ✓

$x_1 = + x_3 - x_2 = 2p - p = p$

$$v_1 = \begin{pmatrix} p \\ p \\ 2p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pro každé $p \neq 0$ je to vlastní vektor k vl. číslu $\underline{1}$.

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_1) = 1 \cdot v_1$

$$A \; v_1 = v_1$$

(10)

Další vlastní vektory jsou

k $\lambda_2 = 2$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(v_2) = 2v_2$

$\lambda_3 = 3$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(v_3) = 3v_3$

Vektory v_1, v_2, v_3 tvoří bázi α

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(v_1))_\alpha , (\varphi(v_2))_\alpha , (\varphi(v_3))_\alpha \right) = \left((1 \cdot v_1)_\alpha \ (2 \cdot v_2)_\alpha \ (3 \cdot v_3)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(11)

Věta Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor. Nechť vl. vektory operátoru φ tvoří bázi α. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou příslušná vl. čísla k vektorům báze.

Věta: pro. $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ různá vl. čísla operátoru $\varphi: U \to U$ pak příslušné vl. vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz indukcí podle k.

$k=1$, pak vl. vektor $v_1 \neq \vec{o}$ a je tedy lin. nezávislý.

Nechť tvrzení platí pro $k-1$. Dokážeme to pro k.

Máme $v_1, \dots, v_k$ vl. vektory k $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$.

(1) $$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$

Na rovnici (1) aplikujeme operátor φ:

$$a_1 \varphi(v_1) + a_2 \varphi(v_2) + \dots + a_k \varphi(v_k) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

(2) $$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_k \lambda_k v_k = \vec{0}$$

Od (2) odečteme λ_k násobek rovnice (1)

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_k) v_2 + \dots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = \vec{0}$$

Podle ind. předpokladu jsou $v_1, \dots, v_{k-1}$ lin. nezávislé. Proto

$$a_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = a_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_k)}_{\neq 0} = \dots = a_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0$$

Dostáváme $a_1 = a_2 = \dots a_{k-1} = 0$.

Dosadíme do (1) a dostaneme

$$a_k v_k = \vec{0}$$

Protože $v_k \neq \vec{0}$, je $a_k = 0$. Tedy $v_1, \dots, v_k$ jsou LN.

<u>Věta</u>: Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Nechť $\varphi : U \to U$ má v $\mathbb{K}$ n různých vlastních čísel. Pak v U existuje báze α tvořená vlastními vektory a platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou příslušná vl. čísla.

<u>Důkaz</u>: Nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou vl. vektory k $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Podle předch. věty jsou LN, protože leží v prostoru dimenze n tvoří bázi. Podle před-předchozí věty je matice φ

v tělo tiši takové, jako úvodní věta

Množina vlastních vektorů se nazývá spektrum lin. operátoru

Algebraická násobnost vl. čísla λ_0 je největší takové číslo k, že

$$\text{char. polynom} = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot q(\lambda)$$

$$q(\lambda_0) \neq 0$$

(Tedy je násobnost kořene polynomu:
$p(\lambda)$ polynom, λ_0 je kořen, násobnost kořene je číslo k takové, že $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda)$ kde $q(\lambda_0) \neq 0$)

15

Geometrická násobnost vl. čísla λ_0 je dimenze podprostoru

$$\ker(\varphi - \lambda_0 id)$$

Vl. vektor u k vl. číslu λ_0 splňuje

$$\varphi(u) = \lambda_0 u$$

$$\varphi(u) - \lambda_0 u = \vec{o}$$

$$(\varphi - \lambda_0 id) u = \vec{o}$$

$$u \in \ker(\varphi - \lambda_0 id)$$

$\ker(\varphi - \lambda_0 id)$ = všechny vl. vektory k λ_0 + nulový vektor.

Nechť $\varphi : U \to U$, kde $\dim U = n$, má vl. čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$. Potom součet jejich alg. násobností je $\leq n$.

Důkaz: $p(\lambda)$ nechť je char. polynom operátoru φ

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{l_k}\,q(\lambda)$$

$$\deg p = l_1 + l_2 + \dots + l_k + \deg q$$

$$n = l_1 + l_2 + \dots + l_k + \deg q$$

$$\underbrace{l_1 + l_2 + \dots + l_k}_{\text{součet alg. násobností}} \le n$$

Věta: Alg. násobnost vl. čísla je $\geq$ geom. násobnost vl. čísla

Příklady: ① $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ char. polynom je $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$

alg. násobnost vl. čísla 2 je 3

17

geom. násobnost je rovna 3 neboť každý vektor z $\mathbb{R}^3$ leží v

$$\ker\left(\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right) = \ker\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \mathbb{R}^3$$

2

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

char. polynom je

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

alg. násobnost vl. čísla 2 je 3

Geom násobnost je 2

$$\dim\ker\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \overset{\dim}{=} [e_2, e_3] \overset{\dim}{=} \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 2$$

3 $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ char. polynom je

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

alg. násobnost je 3

geom. násobnost je 1, neboť

je to $\dim_{\ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dim [e_3] = \dim \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 1$

Důkaz, že alg. násobnost $\geq$ geom. násobnost.

Mějme vl. číslo λ_0, nechť geom. násobnost λ_0 je k. Tj existují lin. nezávislé vlastní vektory $v_1, v_2, \ldots v_k$ operátoru φ.

Doplníme vektory $v_1, \ldots v_k$ do báze $\alpha = (v_1, \ldots v_k, u_{k+1}, \ldots u_n)$ maticí U.

V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \quad k \\ \left(\begin{array}{cccc|cc} \lambda_0 & 0 & & 0 & * & \\ 0 & \lambda_0 & & 0 & * & \\ 0 & 0 & & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & & \lambda_0 & * & \\ \hline & & & 0 & * & \\ 0 & 0 & & 0 & * & \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} n-k \end{array} \\ \qquad\qquad \underbrace{\qquad\quad}_{} \end{array}$$

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad n-k \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & B & & C-\lambda E \end{array}\right) \end{array}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\left(C-\lambda E\right) = (\lambda_0-\lambda)^k \det\left(C-\lambda E\right)$$

Alg. m. a valorii λ_0 şi apoi k.

UNITÁRNÍ A ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

Budeme pracovat s nějakým prostorem se skalárním nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$

Operátor $\varphi: U \to U$ nad $\mathbb{C}$ se nazývá unitární, jestliže platí, že

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Operátor $\varphi: U \to U$ nad $\mathbb{R}$ se nazývá ortogonální, jestliže platí, že

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Příklady:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

je ortogonální operátor

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T (Ay) = x^T (A^T \cdot A) y = x^T E y = x^T y = \langle x, y \rangle$$

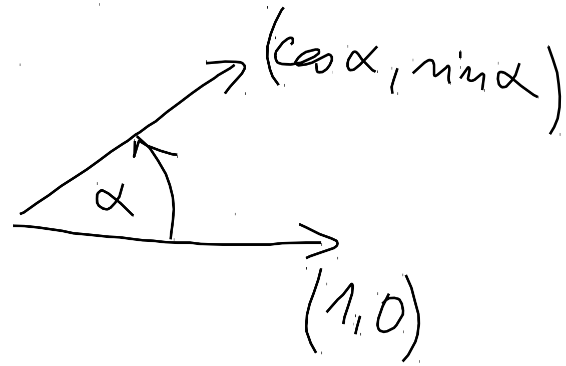
$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \overbrace{-\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}^{0} \\ \underbrace{-\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}_{0} & \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} \end{pmatrix}$$

$$= E$$

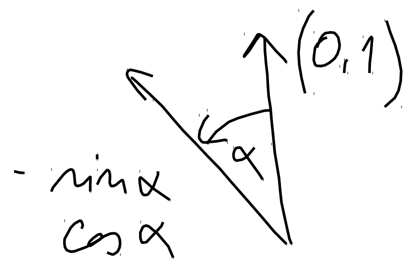
Geometrický význam operátoru $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

je otočení o úhel α proti směru hod. ručiček.

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$



Vlastnosti ortogonálních a unitárních operátorů

① $\forall u \in U$ platí, že $\|\varphi(u)\| = \|u\|$ — je podmínka nejen nutná, ale i postačující.

② $\forall u, v \in U$ platí, že $\measuredangle(u, v) = \measuredangle(\varphi(u), \varphi(v))$

Dk: $\|\varphi(u)\| = \sqrt{\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|$

2 $\measuredangle(\varphi(u), \varphi(v)) = \dfrac{\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle}{\|u\| \, \|v\|} = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} = \cos \measuredangle(u, v)$

$\cos$

$\Rightarrow \measuredangle(\varphi(u), \varphi(v)) = \measuredangle(u, v)$.