SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

U vekt. prostor se skal. součinem

$\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný

jestliže $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$

pro všechna $u, v \in U$.

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$ je samoadjungovaný, jestliže

$$A = A^T \quad \text{(symetrická matice)}$$

$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$ je samoadj. právě když

$$A = \overline{A}^T \quad \text{(hermitovská matice)}$$

2

Označení: $\varphi : U \to V$ adj. zobrazení $\varphi^* : V \to U$

A matice $k \times n$ A^* matice $n \times k$ $A^* = A^T$ nad $\mathbb{R}$

$A^* = \bar{A}^T$ nad $\mathbb{C}$

Minule

- vlastní čísla samoadj. operátorů jsou vždy reálná
- vlastní vektory k různým vl. číslům jsou kolmé

Věta (hlavní věta o samoadj. operátorech) Platí nad $\mathbb{C}$ i nad $\mathbb{R}$.

Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor. Pak v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory operátoru φ. V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vl. čísla operátoru φ.

Dk: Indukcí a první nad $\mathbb{C}$.

Pro U dimenze 1 věta platí, neboť pro $u \neq \vec{0}$ je

$$\varphi(u) = \lambda u, \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Za bázi vezmeme $\dfrac{u}{\|u\|}$.

Nechť věta platí v prostorech dimenze $n-1$.
Nechť $\dim U = n$, $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný.
Pak char. polynom operátoru φ má kořen v $\mathbb{C}$, ale každý kořen je vlastní číslo, takže musí být reálné. Označme jej λ_1 a příslušný vlastní vektor u_1, nechť $\|u_1\| = 1$. Dokážeme, že

$$[u_1]^\perp$$

je invariantní podprostor. Nechť $v_1 \in [u_1]^\perp$, pak platí

$$\langle \varphi(v_1), u_1 \rangle = \langle v_1, \varphi(u_1) \rangle = \langle v_1, \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, u_1 \rangle = 0$$

Tedy $\varphi/[u_1]^\perp : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp$

je samoadjungovaný na prostoru dimenze $n-1$. Podle ind. předpokladu existuje orton. báze na $[u_1]^\perp$ tvořená vl. vektory $u_2, u_3, \dots, u_n$. Pak $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je orton. báze v U tvořená vl. vektory operátoru φ.

Je-li U nad $\mathbb{R}$. Pak volbou ortonormální báze B v U dostaneme izomorfismus $U \xrightarrow{(\ )_B} \mathbb{R}^n$ který zachovává skalární součin. Proto uvažujme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, A je symetrická matice. Chceme dokázat, že φ má nějaké reálné vl. číslo. Pak lze pokračovat indukcí stejně jako v předchozím případě.

5 reálná

<u>Komplexifikace</u> Symetrická matice A indukuje nejen samodj. zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = Ax$, ale také samodj. zobrazení $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\tilde{\varphi}(z) = Az$ $(A^* = \bar{A}^T = A)$

Char. polynom operátoru $\tilde{\varphi}$ je char. polynom matice A a ten má kořen v $\mathbb{C}$. Protože tento kořen je vl. číslo samodj. operátoru, musí být reálné. Tedy char. polynom matice A má reálný kořen. Dál můžeme postupovat stejně jako v komplexním případě.

Důsledek (Věta o spektrálním rozkladu samoadj. operátorů)

(Spektrum operátoru je množina všech jeho vlastních čísel.)

Každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ lze psát ve tvaru

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k ,$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vl. čísla operátoru φ a $P_1, \dots P_k$ jsou kolmé projekce na vlastní podprostory $\ker(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}), \ker(\varphi - \lambda_2 \mathrm{id}), \dots$

Dk: Víme, že U má bázi tvořenou vl. vektory operátoru φ.

Nechť $u \in Ker(\varphi - \lambda_i id)$.

Pak

$$\varphi(u) = \lambda_i u$$

$$(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k)(u) = \lambda_1 \underbrace{P_1 u}_{0} + \dots \lambda_i \underbrace{P_i u}_{u} + \dots + \lambda_k \underbrace{P_k u}_{0} = \lambda_i u$$

Obě strany zobrazení rovnosti se rovnají na vektorech báze. Proto se rovnají na všech vektorech.

Důsledek 2 Každou symetrickou reálnou matici A můžeme psát ve tvaru

$$A = P^T D P$$

kde P je ortogonální matice a $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, kde λ_i jsou vl. čísla matice A.

Důkaz: Uvažujme $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \varphi(x) = Ax$.

φ je samoadjungované, neboť A je symetrická. V ortonormální bázi α složené z vektorů má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

Potom platí

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$= P^{-1} D P$$

Matice P je ortogonální, neboť báze ε a α jsou ortogonální.

Nebo jinak $P^{-1} = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$ je ortogonální.

vektory báze α zapsané v bázi ε

Z minula víme, že pro ortogonální matici je

$$P^{-1} = P^T$$

Proto $A = P^T D P$.

Důsledek 3 Pro kvadratické formy

Pro každou kvadratickou formu $g : U \to \mathbb{R}$ na prostoru U se skalárním součinem existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ taková, že v jejích souřadnicích je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou vl. čísla matice kvadr. formy.

Důkaz: Nechť $f : U \times U \to \mathbb{R}$ je symetrická bilin. forma, která zadává kvadr. formu $q : U \to \mathbb{R}$

$$q(u) = f(u,u).$$

V souřadnicích vůči nějaké orton. báze B lze psát

$$f(u,v) = (u)_B^T \, A \, (v)_B = x^T A y, \quad \text{kde } A = A^T$$

$$= \langle Ax, y \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle$$

Matice bilin. formy f v bázi B zadává zobrazení $\varphi : U \to U$, které má v bázi B stejnou matici. Protože je symetrická, je φ samoadjungované.

Máme bijekci   sym. bil. formy $\longleftrightarrow$ samoadj. operátory

$$f(u,v) \qquad\qquad f(u,v) = \langle \varphi(u), v \rangle \qquad \varphi$$

$$f(u,v) = x^T A y \qquad\qquad \varphi(x) = Ax$$

Samodj. operátor φ má ortonorm. bázu $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ tvorenú vlastnými vektormi. Potom v súradniciach bázy α je

$$f(u,v) = \langle \varphi(u), v \rangle$$

$$f(u_i, u_j) = \langle \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Potom matica f v báze α je $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

a v súradniciach bázy α je

$$g(u) = f(u,u) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

12

SINGULÁRNÍ ROZKLAD MATICE

Příklad: A matice $k \times n$, A^* je matice $n \times k$.

A^*A je matice $n \times n$
AA^* je matice $k \times k$

} obě jsou navíc symetrické (nebo hermitovské)

Nad $\mathbb{R}$

$$A^*A = A^TA$$

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

A^TA je symetrická

Nad $\mathbb{C}$

$$A^*A = \bar{A}^TA$$

$$\overline{(\bar{A}^TA)^T} = (\bar{\bar{A}}^T\bar{A})^T = \bar{A}^T(\bar{\bar{A}}^T)^T = \bar{A}^TA$$

$\bar{A}^TA$ je hermitovská

Lemma Nechť $\varphi: U \to V$ je lin. zobrazení, U, V prostory nad K se skalárním součinem. Potom $\varphi^*\varphi: U \to U$ je samoadjungované, pozitivně semidefinitní, tj.

$$\langle (\varphi^*\varphi)(u), u \rangle \geq 0,$$

všechna vl. čísla $\varphi^*\varphi$ jsou nezáporná a navíc platí, že

$$\ker(\varphi^*\varphi) = \ker \varphi.$$

Dk: $\langle \varphi^*\varphi(u), v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, \varphi^*\varphi(v) \rangle$

$\varphi^*\varphi$ je samoadjungované. Dále

$$\langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \geq 0$$

Speciálně pro vlastní čísla je

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \geq 0, \text{ tedy } \lambda \geq 0.$$

Ponont $\ker(\varphi^*\varphi) = \ker\varphi$.

Zřejmě $\ker\varphi \subseteq \ker\varphi^*\circ\varphi$

neboť $u \in \ker\varphi$, pak $\varphi(u) = \vec{0}$ a $\varphi^*\varphi(u) = 0$.

Obrácená inkluse. Nechť $\varphi^*\varphi(u) = 0$. Pak

$$0 = \langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \Rightarrow \varphi(u) = \vec{0},$$ tedy $u \in \ker\varphi$.

Věta o singulárním rozkladu

Nechť $A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak existují unitární (resp. ortogonální) matice P typu $k\times k$ a Q typu $n\times n$ takové, že

$$A = PSQ^*$$

kde $$S = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \quad s_r \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in Mat_{k\times n}(\mathbb{K})$$

a čísla $s_1, s_2, \ldots s_r$ jsou druhé odmocniny kladných vl. čísel matice A^*A.

Důkaz: Uvažujme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (nebo $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$) definované

$$\varphi(x) = Ax.$$

Pak zobrazení $\varphi^* \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

je zadané $(\varphi^* \varphi)(x) = A^* A x$.

Toto zobrazení je samoadjungované s vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ kladnými a s nulovými $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Vezměme v $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) ortonorm. bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ tvořenou vlastními vektory operátoru $\varphi^* \varphi$.

Položme $Q = (id)_{\varepsilon, \alpha}$

Protože $\ker(\varphi^* \varphi) = \ker \varphi$, tak $[u_{r+1}, \dots u_n] = \ker \varphi$.

Pro vektory u_i, $1 \le i \le r$ platí

$$\|\varphi(u_i)\|^2 = \langle \varphi(u_i), \varphi(u_i) \rangle = \langle \varphi^* \varphi(u_i), u_i \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_i \rangle = \lambda_i$$

$1 \le i < j \le r$

$$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \langle \varphi^* \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \lambda_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0} = 0$$

$\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_r)$ jsou ortogonální vektory v $\mathbb{R}^k$.

Položíme $v_i = \dfrac{\varphi(u_i)}{\sqrt{\lambda_i}}$, $\|v_i\| = 1$

Vektory $v_1 \dots v_r$ doplníme na ortonormální bázi $\beta = (v_1 \dots v_r, \dots v_k)$ prostoru $\mathbb{R}^k$ ($\mathbb{C}^k$). Položíme $P = (id)_{\varepsilon_k, \beta}$

Spočítáme

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \dots (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = S$$

17

$$A = (\varphi)_{\varepsilon_k, \varepsilon_n} = (id)_{\varepsilon_k, \beta} (\varphi)_{\beta, \alpha} (id)_{\alpha, \varepsilon_n}$$

$$= P S Q^{-1} = P S Q^{*}$$

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\varphi(x) = Ax$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 6$

u_1 vl. vekt. k λ_1, jednotkový $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

u_2 vl. vekt. k λ_2, $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\varphi(u_1) = A u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

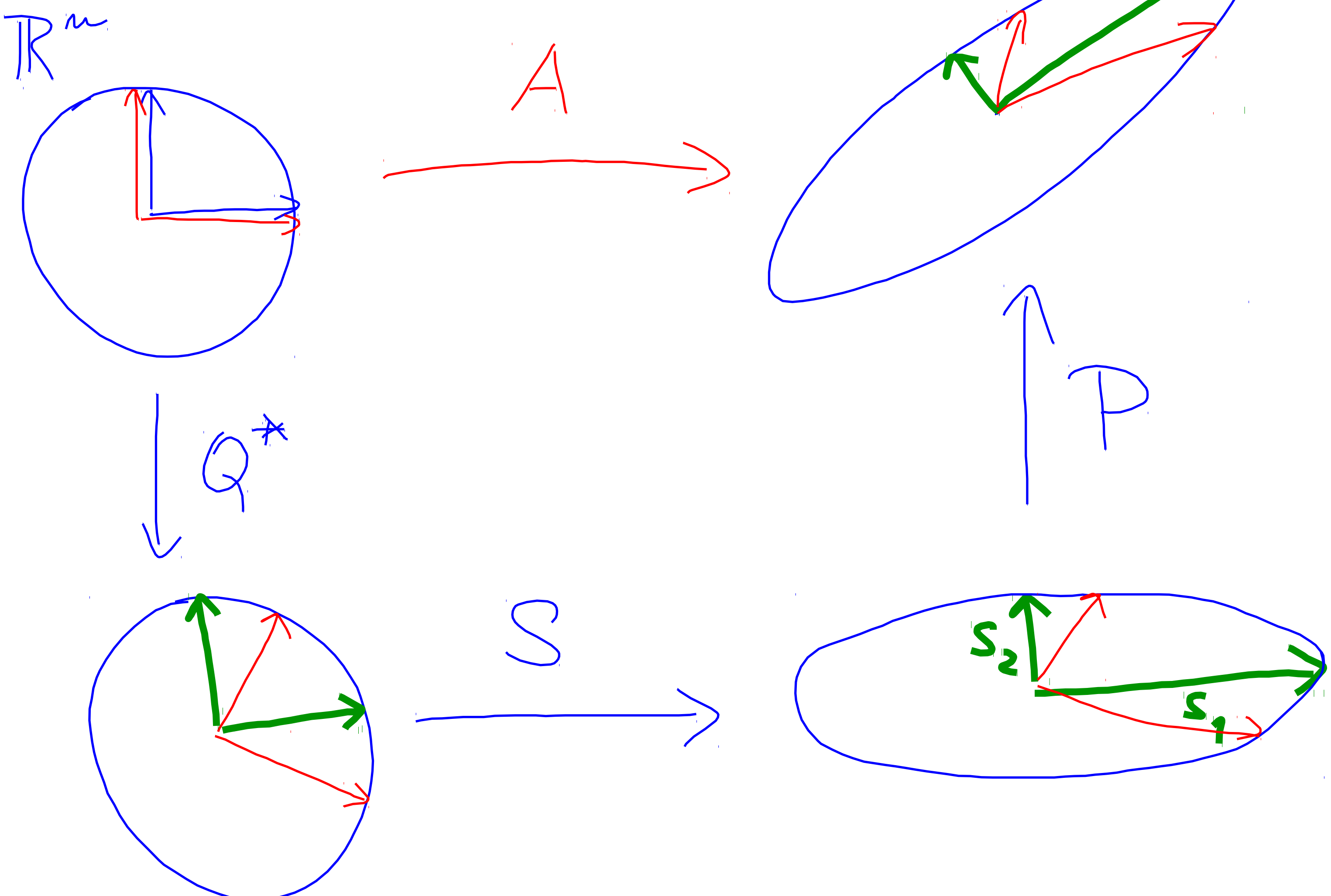
$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\varphi(u_2) = \frac{1}{\sqrt{6}} A u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v_3 doplnění v_1 a v_2 do ortonormální báze

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*$$

Geometrická interpretace



Čísla $s_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $s_2 = \sqrt{\lambda_2}$, $\dots$, $s_r = \sqrt{\lambda_r} > 0$ se nazývají singulární čísla matice A.