PSEUDOINVERZNÍ MATICE

Singulární rozklad A matice $k \times n$

$$A = \underbrace{P}_{k\times k}\,\underbrace{S}_{k\times n}\,\underbrace{Q^*}_{n\times n}$$

$$S = \left(\begin{array}{cccc|c} s_1 & & & 0 & \\ & s_2 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & s_r & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$s_i > 0$

P, Q byly unitární nebo ortogonální matice $Q^* = \overline{Q}^T$

Nechť A je invertibilní matice $n \times n$. Nechť její sing. rozklad je

$$A = PSQ^* = P\begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{pmatrix} Q^* \qquad s_i > 0$$

Potom inverzní matice k A je

$$\underline{A^{-1}} = (PSQ^*)^{-1} = (Q^*)^{-1} S^{-1} P^{-1} = (Q^*)^* S^{-1} P^* =$$

$$= \underline{Q S^{-1} P^{-1}} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & & & 0 \\ & s_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Singulární rozklad inverzní matice

<u>Definice pseudoinverzní matice</u> Nechť A je matice typu $k \times n$ se singulárním rozkladem

$$A = \underset{k\times k}{P} \underset{k\times n}{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{n\times n}{Q^*} \qquad \text{kde } D = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_r \end{pmatrix}, \; s_i > 0,$$

Potom matici

$$A^{(-1)} = \underset{n\times n}{Q} \underset{n\times k}{\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{k\times k}{P^*}$$

typu $n \times k$ se nazývá pseudoinverzní maticí k matici A.

<u>Vlastnosti pseudoinverzní matice</u>

1. Je-li A invertibilní, je $A^{(-1)} = A^{-1}$.
2. $\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = A$

(3) $A^{(-1)} \cdot A$ a $A \cdot A^{(-1)}$ jsou samoadjungované matice (hermitovské nebo symetrické)

(4) Je-li $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^r$, $\varphi(x) = Ax$, a $\varphi^{(-1)} : \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $\varphi^{(-1)}(y) = A^{(-1)} y$, je

$$\varphi^{(-1)} \circ \varphi(x) = A^{(-1)} \cdot A x$$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^n$ na podprostor $(\ker \varphi)^{\perp}$.

$$\varphi \circ \varphi^{(-1)}(y) = A A^{(-1)} y$$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^r$ na podprostor $\operatorname{im} \varphi$.

5 Platí $A A^{(-1)} A = A$

$$A^{(-1)} A A^{(-1)} = A^{(-1)}$$

6 Důležitá početně

$$A^{(-1)} = (A^* A)^{(-1)} A^*$$

Důsledek 6 a 1 je: je-li $A^* A$ invertibilní matice, je

$$A^{(-1)} = (A^* A)^{-1} \cdot A^*$$

Důkazy:

① byla dokázána jako motivace pro definici pseudoinverze na začátku

② $\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = A$

$$A = P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*, \qquad A^{(-1)} = Q\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^*$$

$$\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = P\begin{pmatrix} \left(D^{-1}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* = P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* = A$$

③ $A^{(-1)} A$ je samoadjungovaná, tj. $\left(A^{(-1)} \cdot A\right)^* = A^{(-1)} A$.

$$\left(A^{(-1)} \cdot A\right)^* = \left(Q \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{P^* \, P}^{E} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*\right)^* = \left(\underset{n \times n}{Q} \underset{n \times n}{\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{n \times n}{Q^*}\right)^* =$$

$$= \left(\left(Q^*\right)^*\right) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* Q^* = Q \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* = A^{(-1)} A$$

viz začátek výpočtu

Že $\left(A A^{(-1)}\right)^* = A A^{(-1)}$ se dokáže analogicky.

④ $\varphi(x) = Ax$, $\varphi^{(-1)} = A^{(-1)} y$

Chceme dokázat, že $\varphi^{(-1)} \circ \varphi \, (x) = A^{(-1)} A x$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^n \to (\ker \varphi)^{\perp}$

$\varphi \circ \varphi^{(-1)} (y) = A \, A^{(-1)} y$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^k \to \operatorname{im} \varphi$.

K tomu potřebujeme důkaz věty o sing. rozkladu.

$\alpha = (u_1, \dots u_r, u_{r+1}, \dots u_n)$ je ortonormální báze $\mathbb{K}^n$, kde $\ker \varphi = [u_{r+1}, \dots u_n]$

$Q = (id)_{\varepsilon_n, \alpha}$ ||| $\beta = (v_1, \dots v_r, v_{r+1} \dots v_k)$ ortan. báze $\operatorname{im} \varphi = [v_1 \dots v_r]$.

$P = (id)_{\varepsilon_k, \beta}$ $\quad (\varphi)_{\varepsilon_k, \varepsilon_n} = A$ $\quad (\varphi)_{\beta, \alpha} = S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(\varphi^{(-1)})_{\varepsilon_n, \varepsilon_k} = A^{(-1)}$ $\quad (\varphi^{(-1)})_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑧

$$(\varphi^{(-1)} \circ \varphi)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^{(-1)})_{\alpha,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \times n}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (\varphi^{(-1)}\varphi)(u_i) = u_i & 1 \le i \le r \\ (\varphi^{(-1)}\varphi)(u_j) = 0 & r+1 \le j \le n \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$ je kolmá projekce na $[u_1, \dots u_r] = (\ker \varphi)^{\perp}$

Dále

$$(\varphi \circ \varphi^{(-1)})_{\beta,\beta} = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi^{(-1)})_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{k \times k}$$

$$(\varphi \circ \varphi^{(-1)})(v_i) = \begin{array}{ll} v_i & \text{pro } 1 \le i \le r \\ 0 & \text{pro } r+1 \le i \le k \end{array}$$

Tedy $\varphi \circ \varphi^{(-1)}$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^k$ na $[v_1, \dots v_r] = \operatorname{im} \varphi$.

(5) $A A^{(-1)} A = A$ Počítejme

$$\underbrace{P\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}Q^*}_{A}\;\underbrace{Q\begin{pmatrix}D^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}P^*}_{A^{(-1)}}\;\underbrace{P\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}Q^*}_{A} =$$

$$= \underset{k\times k}{P}\underset{k\times k}{\begin{pmatrix}E&0\\0&0\end{pmatrix}}\underset{k\times n}{\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}}\underset{n\times n}{Q^*} = P\underbrace{\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}}_{k\times n}Q^* = A$$

(6) Chceme dokázat, že $A^{(-1)} = (A^*A)^{(-1)}\cdot A^*$

$$(A^*A)^{(-1)}A^* = \left[\left(P\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}Q^*\right)^* P\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}Q^*\right]^{(-1)}\cdot\left(P\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}Q^*\right)^* =$$

$$= \left[Q\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}\underbrace{P^*P}_{E}\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}Q^*\right]^{(-1)} Q\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}P^* = \left(\underset{n\times n}{Q}\underset{n\times n}{\begin{pmatrix}D^2&0\\0&0\end{pmatrix}}\underset{n\times n}{Q^*}\right)^{-1} Q\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}P^* =$$

$$= Q \begin{pmatrix} (D^{-1})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{Q^* Q}_{E} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^* = Q \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^* = A^{(-1)}$$

Výpočet pseudoinverzní matice

Minule jsme našli sing. rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{Q^*}$$

$$A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}}_{D^{-1} \; 0} \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} \\ \sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Jiný způsob výpočtu podle důsledku.

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ je invertibilní

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Využití pseudoinverzních matic

- APROXIMACE ŘEŠENÍ SOUSTAV LIN. ROVNIC

Nechť A je matice $k \times n$. Uvažujme soustavu

$$Ax = b \qquad x \in \mathbb{K}^n, \quad b \in \mathbb{K}^k$$

Tato soustava má řešení právě když

$$(*) \qquad h(A) = h(A|b)$$

Podmínka $(*)$ je ekvivalentní tomu, že $b \in \operatorname{im} \varphi$, kde
$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $\varphi(x) = Ax$.

V případě, že podmínka $(*)$ není splněna, chceme najít x tak, aby Ax byla co nejblíže k b, tj. aby

$$\|Ax - b\| \text{ byla co nejmenší.}$$

<u>Věta</u>: Pro $x \in \mathbb{K}^n$ funkce

$$\|Ax - b\|$$

nabývá svého minima právě v bodě $x = A^{(-1)}b$.

<u>Důkaz</u>: Již víme, že $AA^{(-1)}$ je matice kolmé projekce $\mathbb{K}^k$ do $\operatorname{im}\varphi$, kde $\varphi(x) = Ax$ (vlastnost 4).

Proto

$$\min_{x \in \mathbb{K}^n} \|Ax - b\| = \min_{y \in \operatorname{im}\varphi} \|y - b\| = \|P_{\operatorname{im}\varphi} b - b\| = \|AA^{(-1)}b - b\|$$

kolmá projekce na $\operatorname{im}\varphi$

Tedy hledané x je $A^{(-1)}b$.

Příklad Máme soustavu (přeurčenou)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} &= 7 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} \varphi \qquad \varphi(x) = Ax.$$

Hledáme (x_1, x_2) tak, aby

$$(x_1 + 2x_2 - 3)^2 + (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 5)^2 = \|Ax - b\|^2$$

bylo co nejmenší. Podle předchozí věty

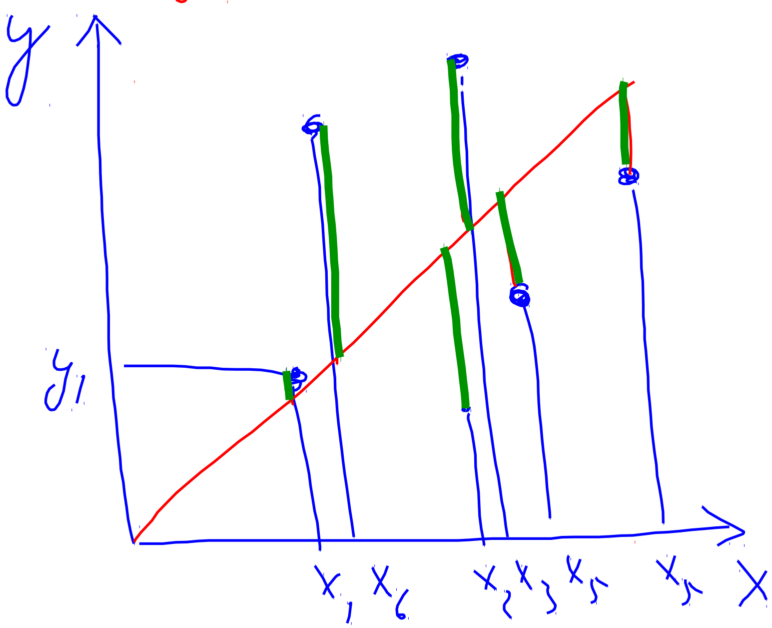
$$x = A^{(-1)} b = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Lineární regrese

Očekáváme, že závislost veličin y a x je lineární, tj

$$y = \beta x.$$

Změříme n hodnot $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ a chceme najít β tak, aby přímka $y = \beta x$ byla „blízko" bodů (x_i, y_i)



tj chceme minimalizovat

$$\sum (y_i - \beta x_i)^2$$

16

Takže máme rovnici

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \boxed{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

kde $\sum x_i^2 \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

s neznámou $\boxed{\beta}$

$$\|A\beta - b\|^2 = (\beta x_1 - y_1)^2 + (\beta x_2 - y_2)^2 + \dots + (\beta x_n - y_n)^2$$

Řešením je

$$\beta = A^{(-1)} \cdot b = (A^* A)^{(-1)} A^* \cdot b$$

$$= \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{-1} (x_1, \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$