Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}(k_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{\lambda_2}(k_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad J_\lambda(k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & 0 \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

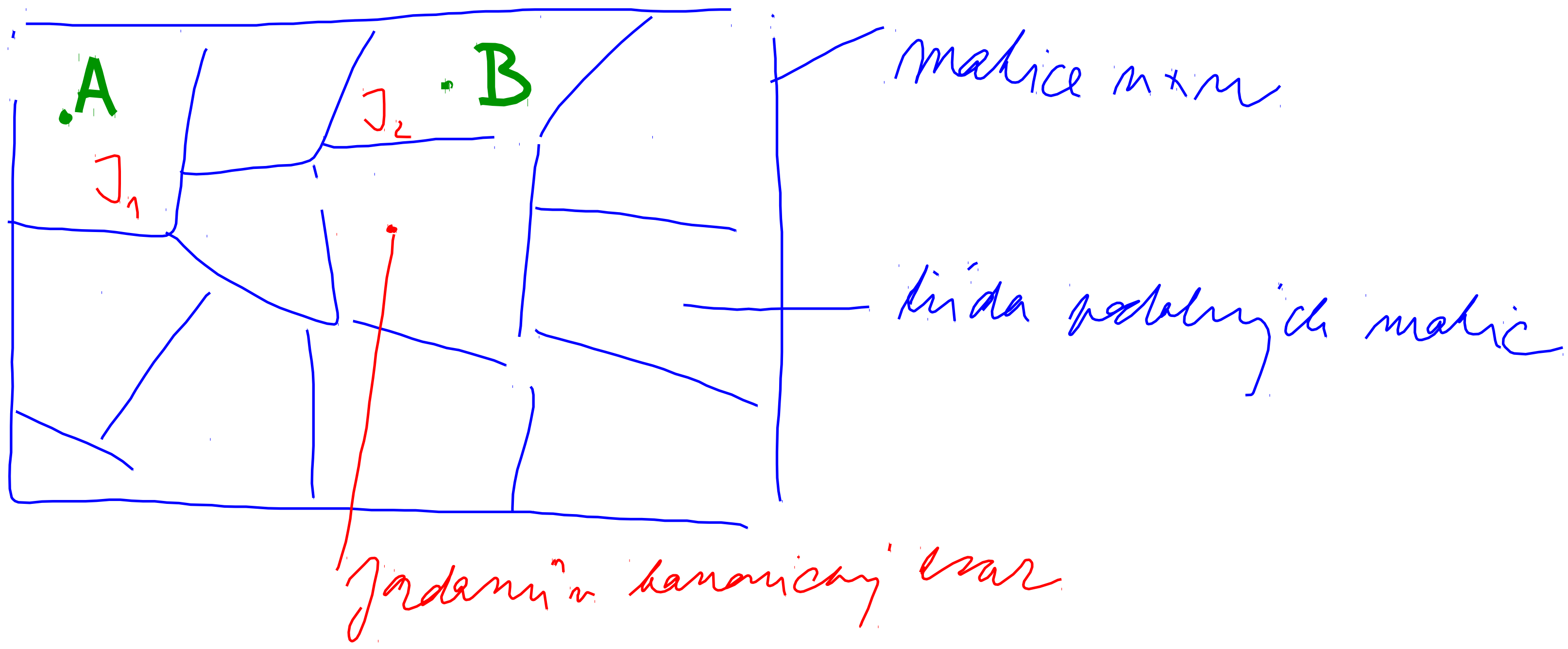
Souvislost s podobností matic

Maticová verze Jordanovy věty:

Jestliže je A matice $n \times n$, která má n vlastních čísel včetně alg. násobnosti, pak je A podobná matici v Jordanově kanonickém tvaru

$$J = P^{-1} A P$$

Matice J je určena jednoznačně až na pořadí bloků.



Jordanův kanonický tvar je invariant podobnosti.

Příklad 1a

$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

chceme najít Jordanův kanonický tvar pro matici A

Char. polynom $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

Vl. čísla $\lambda_1 = 2$ vl. vektor $v_1 = (1,-2,3)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. násobnost je 2

geom. násobnost je 2 $\quad v_2 = (3,6,-8)^T$

Vezmeme bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad v_3 = (1,-1,1)^T$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$\varphi(v_1) = 2v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3$

$\varphi(v_2) = v_2 + 0\cdot v_1 + 0\cdot v_3$

$\varphi(v_3) = v_3 + 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \overset{P^{-1}}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\alpha,\varepsilon}}} \cdot (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} \cdot \overset{P}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\varepsilon,\alpha}}}$$

$$\underset{\text{Jord. kan. tvar}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} A \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}}$$

Příklad 1b

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = (1,0,0)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. násobnost je $\underline{2}$ $\qquad v_2 = (1,-1,0)^T$

geom. násobnost je $\underline{1}$

5

Musíme najít řetězec délky 2 k vl. číslu $\lambda_2 = 1$.

$$\vec{o} \xleftarrow{A-1\cdot E} v_2 = (1,-1,0)^T \xleftarrow{A-1\cdot E} v_3$$

Řešíme soustavu $(A-E)v_3 = v_2$

má více řešení. Vybereme jedno $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ obecné řešení je $\begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -1 \end{pmatrix}$

Vektory v_1, v_2, v_3 tvoří bázi α

$\varphi(v_1) = 2v_1$

$\varphi(v_2) = 1\cdot v_2$

$\varphi(v_3) = v_2 + v_3$

$(\varphi - id)v_3 = (A-E)v_3 = v_2$

$\varphi(v_3) = v_2 + id\, v_3 = v_2 + v_3$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ matice v JKT s dvěma buňkami

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= P^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pravidlo 1 JKT matice A obsahuje na diagonále vlastní čísla matice, každé tolikrát, kolik činí jeho alg. násobnost.

Pravidlo 2 o počtu Jordanových buněk s vl. číslem λ_0.

V JKT matice A je počet Jordanových buněk s vlastním číslem λ_0 roven geometrické násobnosti vl. čísla λ_0.

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Každé buňce pro vl. čísla λ_0 odpovídá jeden řetězec. Na začátku každého řetězce stojí vlastní vektor.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 2 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

geom. násobnost vl. čísla 2 je 3

(8)

Tato dvě pravidla umožnují pomocí algebraické a geometrické násobnosti najít JKT pro matice 2×2 a 3×3.
Pro matice 4×4 již ale nestačí.

3×3 (1) 3 různá vl. čísla

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(2a) 2 různá vl. čísla

λ_1 alg. nás. 1

λ_2 alg. nás. 2

geom. nás. 2

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(2b) 2 různá vl. čísla

λ_1 alg. nás. 1

λ_2 alg. nás. 2

geom. nás. 1

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 1 \\ & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

3a

1 vl. číslo alg. násob. 3

geom. násob. 3

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

3b

geom. násob. 2

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & \\ \hline 0 & \lambda_1 & 1 \\ & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$$

3c

geom. násob. 1

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Je potřeba najít i matici P takovou, že

$$J = P^{-1} A P.$$

K tomu musíme hledat řetězce.

Příklad 2

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$$

$\lambda_1 = 2$ je vl. číslo alg. násobnosti 3, geom. násobnost je 1.

Vlastní vektory $u_1 = (2,1,2)^T$

Musíme najít řetězec délky 3 pro vl. číslo $\lambda_1 = 2$. Tento řetězec začíná vl. vektorem a to musí být nějaký násobek u_1

$$(A-2E)u_2 = u_1$$
$$(A-2E)u_3 = u_2$$

Jedno z možných řešení

$u_2 = (5,2,1)^T$, $u_3 = (3,1,0)^T$

11

$$\vec{0} \xleftarrow{A-2E} u_1 \xleftarrow{A-2E} u_2 \xleftarrow{A-2E} u_3$$

$$\varphi(u_1) = 2u_1$$
$$\varphi(u_2) = u_1 + 2u_2$$
$$\varphi(u_3) = u_2 + 2u_3$$

Matice φ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= P}$$

matice P není určena jednoznačně, neboť rovnice $(A-2E)u_2 = u_1$ má řešení
$(A-2E)u_3 = u_2$

Příklad 3 $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$$

Vl. čísla $\lambda_1 = 2$ má alg. násobnost 3, geom. násobnost 2

vl. vektory $\quad u = (2, -1, 0)^T$

$\quad v = (0, 0, 1)^T$

Víme, že JKT je

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Báze α taková, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$ se skládá ze dvou řetězců pro vl. číslo $\lambda_1 = 2$. Jeden má délku 1 – je to nějaký vl. vektor a druhý má délku 2. Začíná vl. vektorem, ale není jasné kterým. Hledáme mezi

$a u + b v$.

Řešíme soustavu $(A-2E)w = au+bv$ $\quad\Big\|\quad 0 \xleftarrow{A-2E} au+bv \xleftarrow{A-2E} w$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má řešení právě když $2a+b=0$. Např. pro $a=1$, $b=-2$. Vyřešíme soustavu

$$(A-2E)w = u-2v \qquad w = (-1,1,1)^T$$

Vektory

$$0 \xleftarrow{A-2E} u-2v \xleftarrow{A-2E} w$$

tvoří řetězec délky 2.

Vezmeme bázi

$$\alpha = \Big(\underbrace{u}_{\text{řetězec délky 1}},\ \underbrace{u-2v,\ w}_{\text{řetězec délky 2}} \Big)$$

$$\underbrace{\text{řetězec délky 1} \quad \text{řetězec délky 2}}_{\text{maximální lin. nezávislé}}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = (id)_{\alpha,\varepsilon}\, A\, (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = P$$

Matice 4×4

JKT nelze již najít jen pomocí alg. a geom. násobnosti vlastních čísel.

Jedna vl. čísla alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2

2 buňky s vlastním číslem λ_1

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ \hline & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{array}\right) \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \\ \hline & & & \lambda_1 \end{array}$$

Příklad 4

$\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (1+\lambda)^4$$

$\lambda_1 = -1$ je vl. číslo alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2

vlastní vektory $u = (1,0,3,0)^T$, $v = (0,0,1,-2)^T$

Hledáme řetězec délky aspoň 2.

$$(A+E)w = au + bv$$

Soustava příslušná má soustava řešení pro každé $\underline{a}$ a $\underline{b}$ (udělejte si doma). Tedy řešíme soustavy 2

$$(A+E)u_1 = u \qquad\qquad (A+E)v_1 = v$$

$$u_1 = (0,-1,0,3)^T \qquad\qquad v_1 = (0,-2,0,5)^T$$

Dostáváme dva řetězce délky 2. Ty tvoří bázi α

$$\alpha = (\underbrace{u, u_1}_{1.\ \text{řetězec}}, \underbrace{v, v_1}_{2.\ \text{řetězec}})$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = J = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= P^{-1} \; A \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = P$$

Kontrola správnosti matice P. Musí platit

$$PJ = AP$$

Příklad 5

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$

$\lambda = 1$ je vl. číslo alg. nás. 4
geom. násobnosti 2

Vl. vektory $u = (0,1,0,1)^T$, $v = (-2,0,3,0)^T$

Řešíme soustavu: $(A-E)w = au + bv$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení právě když

$a + 6b = 0$

Neexistují 2 lin. nezávislé řetězce délky 2 $\Rightarrow J = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & \\ \hline & & & -1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Zvolíme $b = 1$, $a = -6$

$-6u+v = (-2,-6,3,-6)^T$

začátek řetízce délky 3

$(A-E)w = -6u+v$

$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right) + a_1 u + b_1 v$ ← obecné řešení

Hledáme 3. vektor řetízce $(A-E)z = w$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3}-2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1+a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3}-2b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -\frac{5}{3}+a_1+4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a_1+6b_1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení pro $-1 + a_1 + 6b_1 = 0$

Zvolíme $b_1 = 0$, $a_1 = \underline{1}$

$$w = \left(\tfrac{1}{3}, 0, 0, 1\right)$$

$$z = \left(0, 0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

Nalezli jsme řetězec délky 3

$$\vec{0} \xleftarrow{A-E} -6u+v \xleftarrow{A-E} w = \left(\tfrac{1}{3}, 0, 0, 1\right) \xleftarrow{A-E} z = \left(0, 0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

a řetězec délky 1 (lin. nezávislý)

$$0 \leftarrow u = (0, 1, 0, 1)$$

Báze $\alpha = (-6u+v, w, z, u)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

21

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} \, A \, (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 6 & 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} = P$$