JORD KANONICKÝ TVAR

Opět s příkladem

Příklad 5 $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

$$(J - 1 \cdot E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(J - 1 \cdot E)^3 = 0$$

$$J = P^{-1} A P \Rightarrow A = P J P^{-1}$$

$$(A - 1\cdot E)^k = (P J P^{-1} - 1 P E P^{-1})^k = P (J - 1\cdot E)^k P^{-1}$$

V našem případě

$$(A - 1\cdot E)^2 \neq 0 \quad \text{neboli} \quad (J - 1\cdot E)^2 \neq 0$$

$$(A - 1\cdot E)^3 = 0 \quad \text{neboli} \quad (J - 1\cdot E)^3 = 0.$$

Tímto způsobem lze zjišťovat velikost největší buňky s vl. čís-
lem λ.

<u>Jiný způsob výpočtu</u> Jestliže matice A má pouze jedno vlastní číslo alg. násobnosti n (A je $n \times n$, v našem případě 4). Pak lze řetězec délky 3 resp. 2 hledat „hádáním"

Vezmeme libovolné $v_3 \neq 0$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = v_2 \xrightarrow{A-E} \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} = v_1 \xrightarrow{A-E} \vec{0}$$

Toto je řetězec délky 3. Vezmeme n. vektor lin. nezávislý s v_1,

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dostaneme bázi $B = (\underbrace{v_1, v_2, v_3}_{\text{řetězec délky } 3}, \underbrace{v_4}_{\text{řetězec délky } 1})$

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$J = (\varphi)_{B,B} = (id)_{B,E} (\varphi)_{E,E} (id)_{E,B}$$

$$= P^{-1} A \underset{\begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ -18 & 6 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ -18 & 9 & 0 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{P}}$$

Zaoberáme sa sústavami lin. diferenciálnych rovníc

Vieme, že rovnica

$$x' = ax$$

$$x(0) = x_0$$

pre funkciu $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má riešenie $x(t) = e^{at} \cdot x_0$

Sústava lin. dif. rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \dots \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{01} \\ x_2(0) &= x_{02} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Maticově

$$x' = Ax$$
$$x(0) = x_0$$

kde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$.

Víme, že

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

Lze definovat

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots \qquad \in Mat_{n \times n}$$

Tato řada vždy konverguje.

Řešení $x' = ax$ je

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots$$

Analogicky funkce

$$e^{At}x_0 = \left(E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\right)x_0$$

je řešením soustavy

$$x' = Ax$$
$$x(0) = x_0$$

neboť řada konverguje stejnoměrně, můžeme ji derivovat člen po členu:

$$\left(e^{At}\right)' = E' + (At)' + \frac{(A^2t^2)'}{2} + \frac{(A^3t^3)'}{3!} + \dots$$

$$= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2} + \frac{A^4t^3}{3!} + \dots = A\left(E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= A \cdot e^{At}$$

8

Řada $E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$

je obecně nekonečná. Je konečná pouze pro matice s vlastností, že existuje k takové, že $A^k = 0$.

$$J_k(\lambda) = \lambda E + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}^k = 0$$

$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \dots & & & \end{pmatrix}}$ je pouze konečná řada.

Platí: jestliže matice A a B komutují, pak

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Matice λE a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \dots & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ komutují.

Proto

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda E t + Dt} = e^{\lambda E t} \cdot e^{Dt} = e^{\lambda t} \cdot E \cdot \underbrace{e^{Dt}}_{\text{je dáno pouze konečnou řadou}}$$

Je-li J Jordanův kanonický tvar, platí pro exponenciálu taky:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_2 t} & \\ & 0 & & & e^{\lambda_2 t} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \left(E + Dt + \frac{D^2 t^2}{2} + \frac{D^3 t^3}{3!} + \dots \frac{D^k t^k}{k!} \right)$$

neboť $D^{k+1} = 0$.

Nechť $J = P^{-1} A P$ a nechť $y(t)$ je řešením soustavy

$$\dot{y}(t) = J y(t)$$

$y(t)$ umíme spočítat pomocí konečného součtu.

Pak
$$x(t) = P y(t)$$
$$x'(t) = P y'(t) = P J y(t) = \underbrace{P J P^{-1}}_{A} x(t) =$$
$$= A x(t)$$

Závěr: Jestliže má matice A Jord. kanonický tvar, pak řešení soustavy $x'(t) = A x(t)$ je možno spočítat jako
$$x(t) = P^{-1} y(t) \quad \text{kde} \quad y(t) = e^{Jt}$$
a $J = P^{-1} A P$. Součet pro výpočet $y(t)$ je konečný.

DŮKAZ VĚTY O JKT

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor. Předpokládejme, že součet alg. násobností jeho vlastních čísel je roven dim U. Potom v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v JKT. Tento tvar je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Důkaz Interaktivní osnova – Bachurová: LA po pokročilé
– Slovák: LA kap. 5
– talule z předchozích let

Nové pojmy: Kořenový podprostor
λ je vl. číslo operátoru $\varphi : U \to U$ (R root)

$$R_\lambda = \{ u \in U,\ \exists k\ (\varphi - \lambda \mathrm{id})^k (u) = 0 \}$$

$\ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}) \subseteq R_\lambda$

vlastní podprostor

Vlastnosti:

1. R_λ je vekt. podprostor
2. R_λ je invariantní vůči $\psi : U \to U$ které komutuje s φ.
   Speciálně R_λ je invariantní vůči $\varphi - \mu \mathrm{id}$.
3. Je-li $\mu \neq \lambda$ pak $(\varphi - \mu \mathrm{id})|_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je izomorfismus
4. $(\varphi - \lambda \mathrm{id})|_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je nilpotentní, což znamená, že existuje k tak, že $\left((\varphi - \lambda \mathrm{id})|_{R_\lambda}\right)^k = 0$.

<u>Příklad</u>: $\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7 \qquad \varphi(x) = J \cdot x$

$$J = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|c|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & 0 & \lambda_2 & \\ \hline & & & & & & \lambda_2 \end{array} \end{pmatrix}$$

$$R_{\lambda_1} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$$

$$(\varphi - \lambda_1 id) e_2 = \varphi(e_2) - \lambda_1 e_2 = \lambda_1 e_2 + e_1 - \lambda_1 e_2$$
$$= e_1$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)^2 e_2 = (\varphi - \lambda_1 id) e_1 = \vec{o}$$

$$R_{\lambda_2} = [e_5, e_6, e_7]$$

K důkazu vlastností

(4) $\varphi - \lambda\, id / R_\lambda$ je nilpotentní. $u_1, \dots u_r$ báze R_λ

$\exists k_1, \dots k_r \quad (\varphi - \lambda\, id)^{k_i} u_i = 0$

Vezme $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_r)$

Pak $(\varphi - \lambda\, id)^k u_i = (\varphi - \lambda\, id)^{k-k_i} \underbrace{(\varphi - \lambda\, id)^{k_i} u}_{0} = \vec{0}$

Po ostatní vektory to musí také platit.

(2) Ze 4 víme, že $R_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda\, id)^k$

Jestliže platí $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, pak $\ker \varphi$ je invariantní vůči ψ $\quad u \in \ker \varphi \quad \varphi \psi(u) = \psi\, \varphi(u) = \psi\, \vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow \psi(u) \in \ker \varphi$.

$\varphi - \lambda\, id$ komutuje s $\varphi - \mu\, id$. Proto R_λ je invariantní vůči $\varphi - \mu\, id$.

3 $\varphi - \mu\, id|_{R_\lambda}$ je izomorfismus (stačí ale že je prosté) pro $\mu \neq \lambda$

$u \in R_\lambda$ takové, že $(\varphi - \lambda id)^k u = 0$, ale $(\varphi - \lambda id)^{k-1}(u) \neq 0$.

Předp. že $(\varphi - \mu id)(u) = \vec{o}$, tj $\varphi(u) = \mu u$.

$$0 = (\varphi - \lambda id)^k (u) = (\varphi - \lambda id)^{k-1} (\varphi - \lambda id) u = (\varphi - \lambda id)^{k-1} (\mu u - \lambda u)$$

$$= \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} (\varphi - \lambda id)^{k-1} u$$

$\Rightarrow (\varphi - \lambda id)^{k-1} u = \vec{o}$. Spor s výběrem čísla k.

Samotný důkaz věty o JKT má dva kroky:

$\boxed{\text{1. krok}}$ **Věta:** Za předpokladů Jordanovy věty je

$$V = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$$

a $\dim R_{\lambda_i} =$ alg. násobnost vl. čísla λ_i.

Součet více podprostorů

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{ v_1 + v_2 + \dots + v_k \in V, \ v_i \in V_i \}$$

Součet je direktní, jestliže platí

$$\forall (v_1, v_2 \dots v_k) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = \vec{o} \implies v_1 = v_2 = \dots = v_k = \vec{o}$$

Důkaz, že součet $R_{\lambda_1}+\dots+R_{\lambda_k}$ je direktní se dělá indukcí podle k.

Pro $k=1$ zřejmé. Nechť $R_{\lambda_1}+\dots+R_{\lambda_{k-1}}$ je direktní.

Vezme $v_i \in R_{\lambda_i}$, $i=1,2,\dots k$

$$(*) \qquad v_1+v_2+\dots+v_k=\vec{0}$$

Aplikujme $(\varphi-\lambda_k id)^r$ a zjistíme tak, že $(\varphi-\lambda_k id)^r v_k=\vec{0}$

Potom

$$\underbrace{\overbrace{(\varphi-\lambda_k id)^r \underset{\Uparrow\ R_{\lambda_1}}{v_1}}^{w_1}}_{\in R_{\lambda_1}} + \underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^r v_2}_{w_2}+\dots+\underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^r v_{k-1}}_{w_{k-1}} = \vec{0}$$

$$v_1=\vec{0} \iff (\varphi-\lambda_k id)^r v_1=\vec{0}$$

Tedy máme

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} = \vec{o}, \quad u_i \in R_{\lambda_i}$$

Podle ind. předpokladu je

$$u_1 = u_2 = \dots = u_{k-1} = \vec{o}$$

$$\underbrace{(\varphi - \lambda_k id)}_{izo}{}^2 v_1 = \dots = \vec{o}$$

$$\Longrightarrow \quad v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = \vec{o}$$

Dosazením do $(*)$ dostaneme i $v_k = \vec{o}$.

Důkaz, že $U = R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_k}$ se dělá pomocí věty (důkaz v přednášce z roku 2016)

Existuje báze B v U tak, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & O & & \lambda_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Důkaz pomocí kvocientu vekt. prostorů.

2 Odtud snadno plyne, že když λ_1 je na diagonále r krát, tak příslušných r nových vektorů báze B generuje R_{λ_1}.

$$R_{\lambda_1} = \ker(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^r \qquad \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}^k = 0$$

Nyní platí, že

$$\sum_{i=1} \dim R_{\lambda_i} = \sum \text{alg. násobnost } \lambda_i = \dim U$$

+ součet je direktní $\Rightarrow$ $U = R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_k}$.

$\boxed{\text{2. krok}}$ Budeme se zabývat nyní operátorem $(\varphi - \lambda_i\, id)$ na R_{λ_i}. Takže značíme

$$\psi = (\varphi - \lambda_i\, id) \qquad R_{\lambda_i} = V.$$

Platí, že $\psi^k = 0$, ψ je nilpotentní na V.

<u>Cyklický operátor</u>: Operátor ψ je cyklický na V, jestliže existuje báze V taková, že

$$\psi\, v_1 = 0, \quad \psi v_2 = v_1, \quad \dots \quad \psi v_s = v_{s-1}$$

($v_1, v_2 \dots v_s$ je řetězec pro ψ a vl. čísla 0)

Speciálně, každý cyklický operátor je nilpotentní.

(21)

<u>Věta:</u> Nechť $\varphi: V \to V$ je nilpotentní. Pak existuje rozklad V na invariantní podprostory

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$$

takový, že φ/V_i je cyklický.

V každém V_i vezmeme příslušnou cyklickou bázi. Dohromady dávají bázi β a platí, že

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & & & 0 \\ & J_{k_2}(0) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}$$

Nyní tuto větu aplikujeme na $(\varphi - \lambda_i id)$ na R_{λ_i}.

Platí že v R_{λ_i} máme bázi B_i a

$$(\varphi - \lambda_i id)_{B_i,B_i} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & & & 0 \\ & J_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$(\varphi)_{B_i,B_i} - \lambda_i (id)_{B_i,B_i}$$

$$\| $$

$$(\varphi)_{B_i,B_i} - \lambda_i E$$

Proto

$$(\varphi)_{B_i,B_i} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & J_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Uděláme-li to pro všechny kořenové podprostory, dostaneme bázi $\alpha = (B_1, B_2, \dots B_k)$ a $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$ v JkT.

<u>Důkaz věty</u>: $\psi^s = 0$ na V

$0 = \operatorname{Im}\psi^s \subset \ \ldots \ \subset \operatorname{Im}\psi^2 \subset \operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Im}\psi^0 = \operatorname{Im} id = V$

$0 = P_s \subsetneqq P_{s-1} \subsetneqq \quad P_2 \subsetneqq P_1 \subsetneqq P_0 = V$

Inkluze neustále ostré. Kdyby $P_i = P_{i-1}$, pak

$P_{i+1} = P_i \implies P_s \neq 0$.

Vybereme bázi P_{s-1} $e_1^{s-1} \ldots$ Jejich obrazy v ψ jsou nulové.

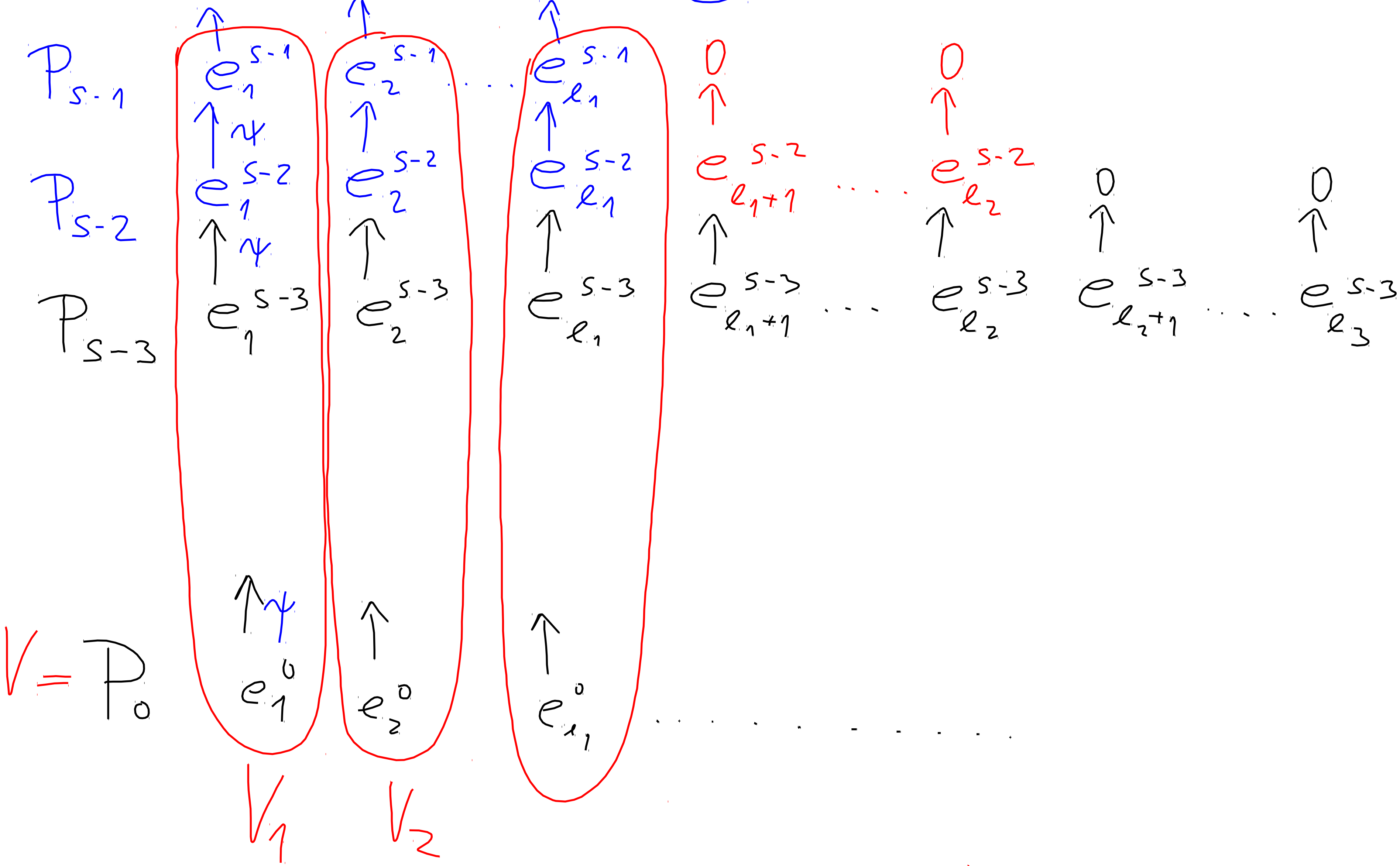
Vezmeme v P_{s-2} vektory $e_1^{s-2} \ldots e_{\ell_1}^{s-2}$

$\psi(e_i^{s-2}) = e_i^{s-1}$

Vektory e_i^{s-1} a e_i^{s-2} jsou LN.

Tyto vektory doplníme na bázi celého P_{s-2}

$\bar{e}_{\ell_1+1}^{s-2}, \ldots, \bar{e}_{\ell_2}^{s-2}$



Tím dostaneme rozklad na podvoky V_i, na kterých je ψ při invariantní

Platí

$$\psi(\bar{e}_j^{s-2}) = \sum_i{}' a_{ji} e_i^{s-1}$$

Místo $\bar{e}_j^{s-2}$ vezmeme $e_j^{s-2} = \bar{e}_j^{s-2} - \sum' a_{ji} e_i^{s-2}$

$$\psi(e_j^{s-2}) = \psi(\bar{e}_j^{s-2}) - \sum_i{}' a_{ij} \psi(e_i^{s-2})$$

$$= \sum_i{}' a_{ji} e_i^{s-1} - \sum{}' a_{ij} e_i^{s-1} = 0 \Rightarrow$$

Vektory $e_i^{s-1}, e_i^{s-2}, e_{\ell_1+j}^{s-2}$ jsou LN

Stejně pokračujeme na P_{s-3}