1. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 28. 2. 2017

Z dvojice úloh **A** a **B** je prvá analogická tomu, co jsme dělali v semináři, druhá je obtížnější a je určena těm, pro které je prvá úloha jednoduchá. Stačí, když odevzdáte řešení jedné z nich.

1A. Mějme prosté lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ a vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ lineárně nezávislé v prostoru U, jsou lineárně nezávislé také vektory $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\dots$,$\varphi(u_k)$ v prostoru V.

Najděte příklad nenulového lineárního zobrazení φ a vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ lineárně nezávislých v U a takových, že $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\dots$,$\varphi(u_k)$ jsou lineárně závislé v prostoru V.

1B. Nechť U a V jsou vektorové podprostory v prostoru W. Nechť $w_1, w_2, \dots, w_k$ je báze podprostoru $U \cap V$, nechť $w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_n$ je báze podprostoru U a konečně nechť $w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_m$ je báze podprostoru V. Dokažte, že $w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_k$, $v_1, \dots, v_m$ je báze podrostoru $U + V$.

2A. Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných reálných čísel. Dokažte, že má limitu.

2B. Nechť $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel. Najděte spojitou funkci $f : [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, která zobrazuje racionální čísla do racionálních čísel, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ a přitom neexistuje $x \in \mathbb{Q}$ takové, že $f(x) = 0$.