

## 2. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 14.3. 2017

Z dvojice úloh **A** a **B** je druhá obtížnější a je určena těm, pro které je prvá úloha jednoduchá. Stačí, když odevzdáte řešení jedné z nich.

**1A.** Uvažujme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \text{ iracionální,} \\ \frac{1}{n}, & \text{pro } x = \frac{m}{n} \text{ racionální, } m \text{ a } n \text{ nesoudělná, } n \geq 0. \end{cases}$$

Dokažte, že pro  $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L > 0.$$

**1B.** Pro funkci definovanou v úloze 1A dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

pro každé  $a \in \mathbb{R}$ .

**2A.** Dokažte z definice spojitosti. Je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$  a  $f(a) \neq 0$ , pak je v bodě  $a$  spojitá i funkce  $\frac{1}{f}$ .

**2B.** Necht'  $\varphi : U \rightarrow U$  je lineární zobrazení s vlastností  $\varphi \circ \varphi = \text{id}$ . Potom je vektorový prostor  $U$  direktním součtem dvou (obecně netriviálních) podprostorů  $V_1 \oplus V_2$  takových, že pro oba platí  $\varphi(V_i) \subseteq V_i$ . Najděte je a tvrzení dokažte.