4. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 28. 3. 2017

Z dvojice úloh **A** a **B** je druhá obtížnější a je určena těm, pro které je prvá úloha jednoduchá. Stačí, když odevzdáte řešení jedné z nich.

1A. Nechť $\mathbb{T}$ je podtěleso reálných čísel. Nechť $d \in \mathbb{T}$ je kladné a $\sqrt{d} \notin \mathbb{T}$. Pak

$$\mathbb{T}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbb{R};\ a, b \in T\}$$

je rovněž těleso. Uvažujme kubickou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

s koeficienty $a, b, c \in \mathbb{T}$. Dokažte: Jestliže má rovnice jeden kořen v $T[\sqrt{d}]$, pak má jeden kořen rovněž v $\mathbb{T}$. (Návod: Dokažte, je-li jeden kořen tvaru $p + q\sqrt{d}$, pak druhý kořen je $p - q\sqrt{d}$. Pomocí Vietových vztahů pak dokažte, že třetí kořen leží v $\mathbb{T}$.)

1B. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $f(a) < c < f(b)$. S použitím věty o průniku do sebe vložených uzavřených intervalů, jejichž délky konvergují k nule, dokažte, že existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = c$.