7. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 2. 5. 2017

Tato domácí úloha slouží k přípravě na písemku. její řešení nemusíte odevzdávat. Úlohy jsou podle obtížnosti označeny **A** – jednodušší a **B** – složitější.

1A. Zopakujte si Cauchyovo kritérium pro konvergenci posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pomocí kvantifikátorů zformulujte Cauchyovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci funkcí $f_n(x)$ na intervalu I.

1B. Udělejte předchozí úlohu a navíc Cauchyovo kriterium pro stejnoměrnou konvergenci dokažte.

2A. Nechť U a V jsou podprostory prostoru W a nechť

$$\dim W = n, \quad \dim U = \dim V = n - 1.$$

Pak

$$\dim U \cap V \geq n - 2.$$

Dokažte.

2B. Nechť $U_1, U_2, \dots U_k$ jsou podprostory prostoru W a nechť

$$\dim W = n, \quad \dim U_i = n - 1.$$

Odhadněte zdola dimenzi prostoru $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$. Svůj odhad dokažte.

3A. K jaké funkci konvergují bodově funkce

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{n}?$$

Konvergují k této funkci stejnoměrně na intervalu $(-\infty, \infty)$? Konverhgují k této funkci stejnoměrně na intervalech $(-K, K)$ pro $K \in \mathbb{R}$? Všechny své odpovědi zdůvodněte

3B. Dokažte, že stejnoměrná limita spojitých funkcí na intervalu I je spojitá funkce na intervalu I.

4A. Nechť f, g a h jsou lineární formy na reálném prostoru U dimenze n. Nechť

$$f = ag + bh$$

pro nějaká reálná čísla a, b. Pak

$$\dim(\ker f \cap \ker g \cap \ker h) \geq n - 2.$$

4B. Nechť f, g a h jsou lineární formy na reálném prostoru U dimenze n. Nechť

$$\ker g \cap \ker h \subseteq \ker f.$$

Pak existují reálná čísla a, b tak že

$$f = ag + bh.$$