Algebra I — Cvičení

Podstatná část příkladů je převzata od kolegů, jmenovitě Prof. Kučery, Doc. Poláka a Doc. Kunce, se kterými jsem při přípravě cvičení spolupracoval. Sbírka vznikla modifikací některých dřívějších soupisů příkladů používaných na cvičení (především sbírky k cvičení Algebra I na PřF v semestru Jaro 2005).

Veškeré připomínky, opravy a komentáře jsou vítány na adrese `klima@math.muni.cz`.

Hvězdičkou jsou označeny doplňující úlohy, které přesahují sylaby předmětu nebo jsou obtížnější.

Sbírku budu postupně doplňovat.

Ondřej Klíma

Verze 28. února 2011

1 Základní vlastnosti operací

Příklad 1.1: Rozhodněte, zda daný grupoid je pologrupa, zda obsahuje (levý, pravý) neutrální prvek, zda je to grupa a zda je operace komutativní.

1) Celá čísla s operací sčítání.
2) Reálná čísla s operací násobení.
3) Celá čísla s operací odečítání.
4) Přirozená čísla s operací největší společný dělitel.

Příklad 1.2: Pro dané množiny matic typu 2 krát 2 nad reálnými čísly rozhodněte zda je sčítání, resp. násobení, matic operací na této množině. Pokud se jedná o operaci, zjistěte, zda je operace asociativní či komutativní, zda obsahuje neutrální prvek a zda se jedná o grupu.

1) Množina všech matic nad celými čísly.
2) Množina všech matic nad racionálními čísly.
3) Množina všech regulárních matic nad racionálními čísly.
4) Množina všech matic s nulou v levém dolním rohu a s jedničkami na diagonále.
5) Množina všech regulárních matic nad celými čísly.

Příklad 1.3: Pro množinu X značíme $P(X)$ množinu všech podmnožin množiny X. Pro následující operace určete, zda grupoid $P(X)$ je pologrupou, zda je operace komutativní a zda existuje neutrální prvek.

1) Průnik.
2) Sjednocení.
3) Množinový rozdíl. ($Y \setminus Z = \{x \in Y \mid x \notin Z\}$)
4) Symetricky rozdíl. ($Y \div Z = (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)$)

Příklad 1.4: Určete, zda operace na tříprvkové množině $\{a, b, c\}$ daná tabulkou je komutativní, asociativní a zda má neutrální prvek.

1)

$\circ$	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	a
c	a	a	a

2)

$\circ$	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	c
c	a	c	a

3)

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

Příklad 1.5: Prvek e pologrupy $(G, \cdot)$ se nazývá idempotent, jestliže $e \cdot e = e$. Ukažte, že každá grupa obsahuje právě jeden idempotent.

Příklad 1.6: Pro množinu X označme $R(X)$ množinu všech relací na X, tj. $R(X) = \{\rho \subseteq X \times X\}$. Na $R(X)$ definujeme operaci $\circ$ takto:

$$\rho \circ \sigma = \{(x, y) \in X \times X \mid (\exists z \in X)((x, z) \in \sigma \wedge (z, y) \in \rho)\} \ .$$

Dokažte, že $(R(X), \circ)$ je monoid.

Víme, že speciálním případem relací jsou zobrazení, pro které je operace $\circ$ skládání zobrazení. Označme $T(X)$ množinu všech transformací množiny X (zobrazení z X do X), tj.

$$T(X) = \{f \in R(X) \mid (\forall x \in X)(\exists! y \in X)((x, y) \in f)\} \ .$$

Rozhodněte, zda je $(T(X), \circ)$ monoid.

Podobně značíme $PT(X)$ množinu všech parciálních transformací na X, tj.

$$PT(X) = \{f \in R(X) \mid (\forall x, y, z \in X)(((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \implies y = z)\} \ .$$

(Všimněme si, že $T(X) \subseteq PT(X)$ a že prázdná relace patří do $PT(X)$.)

Rozhodněte, zda je $(PT(X), \circ)$ monoid. Rozhodněte, zda je $(T(X), \circ)$ nebo $(PT(X), \circ)$ grupa.

V obou případech $T(X)$ i $PT(X)$ se má smysl omezit na injektivní či surjektivní transformace. Které z nich tvoří monoidy a které grupy?

(Pozor: odpovědi se mohou lišit v případech kdy X je jednoprvková, resp. konečná, resp. nekonečná.)

Příklad 1.7: Doplňte následující tabulku operace na tříprvkové množině tak, aby výsledný grupoid byl pologrupou.

$\circ$	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

Příklad 1.8: Následující tabulku je možno jediným způsobem doplnit na tabulku operace $\cdot$ v pologrupě $(S, \cdot)$, kde $S = \{a, b, c, d, e, f\}$.

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d		f
b	b	e	c	d	b	f
c	c	c	f	c	c	d
d	d		c	d	d	f
e	e	b	c	d	e	f
f	f	f	d	f	f	c

1. Určete, kterému prvku z množiny S se rovná $d \cdot b$, resp. $a \cdot e$, v pologrupě $(S, \cdot)$.
2. *Určete všechny idempotenty.
3. *Vypište všechny pravé neutrální prvky.
4. *Určete všechny podmnožiny $G \subseteq S$ takové, že $(G, \cdot)$ je grupa.
5. Lze původní tabulku doplnit tak, aby byla operace $\cdot$ v grupoidu $(S, \cdot)$ komutativní?

Příklad 1.9*: V monoidech $T(X)$ a $PT(X)$ z příkladu 1.6. určete počet všech idempotentů (def. v př. 1.5.)

Příklad 1.10*: V monoidu matic $(Mat_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ typu 2 krát 2 nad racionálními čísly s operací násobení matic určete všechny idempotenty. Pro každý idempotent e určete největší možnou podmnožinu M_e, která společně s operací $\cdot$ tvoří grupu s neutrálním prvkem e.

Popište M_e v $T(X)$ z příkladu 1.6.

2 Pojem grupa

Příklad 2.1: Rozhodněte, zda daný grupoid $(G, \circ)$ je grupa.

1) G je množina nenulových racionálních čísel a operace $\circ$ je dána předpisem $x \circ y = |x \cdot y|$.

2) G je interval $\langle 0, 1)$ a operace $\circ$ je dána předpisem $x \circ y = x + y - [x + y]$, kde $[z]$ značí celou část z čísla z, tj. největší celé číslo menší nebo rovno z.

3) G je množina celých čísel a operace $\circ$ je dána předpisem $x \circ y = x + (-1)^x y$.

4) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ je množina všech dvojic reálných čísel z nichž aspoň jedno je nenulové, a operace $\circ$ je dána předpisem $(x, y) \circ (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$.

5) G je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, přičemž první z nich není 0, a operace $\circ$ je dána předpisem $(x, y) \circ (u, v) = (xu, xv + y)$.

6) G je množina komplexních čísel, jejichž reálná i imaginární část je celočíselná, a operace $\circ$ je sčítání komplexních čísel.

7) $G = \mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel a operace $\circ$ je dána vztahem

$$x \circ y = \begin{cases} -xy, & x < 0, y < 0 \\ |xy|, & \text{jinak} \end{cases} \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}.$$

8) $G = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 = 1\}$ a operace $\circ$ je dána předpisem $(a, b) \circ (c, d) = (ad + bc, bd - ac)$ pro $(a, b), (c, d) \in G$.

9) $G = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 \geq 1\}$ a operace $\circ$ je dána předpisem $(a, b) \circ (c, d) = (ad + bc, bd - ac)$ pro $(a, b), (c, d) \in G$.

10) $G = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 5b^2 = 1\}$ a operace $\circ$ je dána předpisem $(a, b) \circ (a', b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b)$ pro $(a, b), (a', b') \in G$.

Příklad 2.2:

1) Dokažte, že v libovolné grupě platí tzv. *zákony o krácení*

$$(\forall a, b, c)\ (ab = ac \implies b = c) \quad \wedge \quad (\forall a, b, c)\ (ba = ca \implies b = c)\ .$$

2)* Dokažte, že konečná pologrupa, v které platí zákony o krácení, je grupa.

3) Udejte příklad nekonečné pologrupy, která není grupou, ale platí v ní zákony o krácení.

4) Udejte příklad tříprvkového grupoidu, který není grupou, ale platí v něm zákony o krácení. Ukažte, že grupoid není pologrupou.

5) Udejte příklad pětiprvkového grupoidu s neutrálním prvkem, který není grupou, ale platí v něm zákony o krácení. Ukažte, že grupoid není pologrupou.

Příklad 2.3: Určete, kolik je dvouprvkových, resp. tříprvkových, resp. čtyřprvkových grup.

Příklad 2.4: Dokažte, že v konečné grupě o sudém počtu prvků existuje prvek, který je inverzní k sobě samému a není to neutrální prvek.

Příklad 2.5: Doplňte tabulku operace $*$ tak, aby vznikla grupa $(\{a, b, c\}, *)$:

$\circ$	a	b	c
a			
b	c	a	
c			

Příklad 2.6: Nechť $(G, \circ)$ je grupa a a nějaký její pevně zvolený prvek. Dokažte, že potom $(G, \square)$ je také grupa, kde operace $\square$ je definována předpisem $g \square h = g \circ a \circ h$.

Příklad 2.7*: Dokažte, že grupy jsou právě ty pologrupy, pro něž platí:

$$(\forall a, b)\ (\exists x, y)\ (ax = b,\ ya = b)\ .$$

Příklad 2.8*: Dokažte, že v každé konečné pologrupě existuje idempotent.

Příklad 2.9*: Určete všechny dvouprvkové pologrupy (až na izomorfismus, tj. přejmenování prvků).

3 Grupa Permutací

Příklad 3.1: Nechť

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 1 & 9 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}\ ,\ t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}\ ,$$
$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

1) Rozložte permutace s, t, u na součin nezávislých cyklů.
2) Spočtěte součiny $s \circ t$, $t \circ s$, $s \circ u \circ t$. Použijte jak "dvojřádkový"zápis, tak rozklad na nezávislé cykly.
3) Spočtěte $s^3, s^{20}, t^{53}, t^{103}, u^{211}$.
4) Určete inverzní prvky s^{-1}, t^{-1}, u^{-1}.
5) Spočtěte permutace $(s^{120} \circ t^{-3})^{17} \circ u^{23}$ a $(u^{-23} \circ s)^{134} \circ t^4$.
6) Permutace s, t, u rozložte na součin transpozic a určete jejich paritu.

Příklad 3.2: Napište permutace $f = (2,3,4,5) \circ (1,3,6,8)$ a $g = (1,4,6) \circ (2,7,4,8,3) \circ (1,5)$ jako součin 10 transpozic.

Příklad 3.3: Dokažte že permutace $(s^3 \circ t^{-17})^{18} \circ s^{10}$ je sudá permutace pro libovolné permutace $s, t \in \mathbb{S}_9$.

Příklad 3.4: Rozhodněte, zda existuje permutace $s \in \mathbb{S}_9$ taková, že $s \circ (1,2,3) = (1,2) \circ s$.

Příklad 3.5: Určete všechny permutace a z grupy $\mathbb{S}_8$ takové, že $a^2 = (1,2,3)(4,5,6)$. Podobně určete b takové, že $b^4 = (1,2,3,4,5,6,7)$, c takové, že $c^3 = (1,2,3,4)(5,6,7,8)$, d takové, že $d^2 = (1,2,3,4)(5,6,7,8)$ a e takové, že $e^2 = (1,2,3,4)$.

Příklad 3.6: Určete všechny permutace f z grupy S_8 takové, že $f^3 = (1,2)(3,4)(5,6)$.

Příklad 3.7: Určete, pro která přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ existuje permutace $s \in \mathbb{S}_6$ taková, že $s \circ (1,2,3,4,5) \circ s = (1,2)^n$. Pro tato n popište všechny takové permutace s.

Příklad 3.8: Jestliže a je cyklus délky n, pak $a^k = id$ právě když n dělí k. Pokud n nedělí k pak je a^k součinem d nezávislých cyklů délky $\frac{n}{d}$, kde d je největší společný dělitel n a k.

Příklad 3.9*:

1) Ukažte, že libovolnou permutaci v $\mathbb{S}_n$ lze rozložit na součin transpozic tvaru $(1, i)$.
2) Ukažte, že libovolnou sudou permutaci v $\mathbb{S}_n$ lze rozložit na součin cyklů tvaru $(1, 2, i)$.

Příklad 3.10*: Ukažte, že libovolnou permutaci v $\mathbb{S}_n$ lze rozložit na součin cyklů $(1,2)$ a $(1,2,\dots,n)$.

Příklad 3.11*: Určete následující grupy symetrií (jako podmnožiny $\mathbb{S}_n$, pro vhodné n, nebo alespoň určete počty prvků).

1) $\mathbb{D}_3$ grupa symetrií rovnostranného trojúhelníka,
2) $\mathbb{D}_4$ grupa symetrií čtverce,
3) $\mathbb{D}_n$ grupa symetrií pravidelného n-úhelníku (určete alespoň počet prvků),
4) grupa symetrií pravidelného čtyřstěnu.
5) * grupa symetrií krychle.

Příklad 3.12*: Určete, které prvky $a \in \mathbb{S}_n$ lze psát ve tvaru b^2c^2 pro vhodné $b, c \in \mathbb{S}_n$.

4 Grupy zbytkových tříd

Příklad 4.1: Spočtěte 1) $[4]_{15}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{15}$, 2) $[17]_{181}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{181}$, 3) $[49]_{226}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{226}$, 4) $[49]_{225}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{225}$, 5) $[125]_{1296}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{1296}$.

Příklad 4.2: Spočtěte 1) $[2^k+1]_{2^{2k}+1}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{2^{2k}+1}$, 2) $[2^k-1]_{2^{2k}+1}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{2^{2k}+1}$, 3) $[m^2-m+1]_{m^3-1}^{-1}$ v $\mathbb{Z}_{m^3-1}$.

Příklad 4.3: Určete kolik prvků má grupa $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ pro následující n a popište její multiplikativní tabulku.
1) $n = 5$, 2) $n = 7$, 3) $n = 8$.

Příklad 4.4: Určete kolik prvků mají grupy $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ pro následující n:
1) $n = 24$, 2) $n = 306$, 3) $n = 5225$.

Příklad 4.5: Ukažte, že pro libovolné $n > 2$ je $\varphi(n)$ sudé číslo.

Příklad 4.6: Určete všechna přirozená čísla m, pro která platí $\varphi(m) = 18$.

Příklad 4.7*: Určete všechna přirozená čísla n taková, že $\varphi(n) \mid n$.

Příklad 4.8: Určete zbytek po dělení daných čísel číslem 17.
1) $2^{50}+3^{50}+4^{50}$, 2) $5^{40}+6^{40}+7^{40}+8^{40}$, 3) $4^{4^4}+5^{5^5}$, 4) $13^{13^{13}}+15^{15^{15}}$.

Příklad 4.9: Určete zbytek po dělení čísla $a^{9^9-3^{10}}$ číslem 44, pro $a = 8, 9, 10, 11$.

Příklad 4.10: Ukažte, že číslo $2^{60}+7^{30}$ je dělitelné číslem 13.

Příklad 4.11: Určete poslední dvě cifry čísla $15^{15^{15}}$.

Příklad 4.12: Určete poslední tři cifry čísla $15^{15^{15}}$.

Příklad 4.13: Určete poslední dvě cifry čísla $13^{13^{13}}$.

Příklad 4.14*: Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je číslo $2^{2^{2n+1}}+3$ číslo složené.

Příklad 4.15*: Dokažte Čínskou zbytkovou větu: Nechť je dáno $k \in \mathbb{N}$ a k-tice $m_1, \cdots, m_k$ po dvou nesoudělných přirozených čísel. Pak pro libovolnou k-tici $c_1, \cdots, c_k$ přirozených čísel existuje $x \in \mathbb{N}$ takové, že $x \equiv c_i (\operatorname{mod} m_i)$ pro $i = 1, \ldots, k$. Navíc je toto x určeno jednoznačně $\operatorname{mod} m_1 \cdot \cdots \cdot m_k$; přesněji, všechna tato čísla dávají stejný zbytek po dělení číslem $m_1 \cdot \cdots \cdot m_k$.

5 Řád prvku

Příklad 5.1: Určete řád permutace $(1,2,4,5) \circ (3,7,8) \circ (6,9)$ resp. $(1,2,4,5,3,6,7,9) \circ (3,7,8) \circ (6,2,9)$.

Příklad 5.2: Určete největší $k \in \mathbb{N}$ takové, že v grupě $\mathbb{S}_{10}$ existuje prvek řádu k.

Příklad 5.3: Nalezněte nějaké $k \in \mathbb{N}$ takové, že v grupě $\mathbb{S}_{15}$ existuje prvek řádu k, ale v grupě $\mathbb{S}_{14}$ prvek řádu k neexistuje.

Příklad 5.4: Určete řád prvku $[k]_n$ v $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Příklad 5.5: Určete řády všech prvků v $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ pro $n = 7, 8, 12, 13$.

Příklad 5.6: Určete řády prvků $[2]_{17}$ a $[13]_{17}$ v $(\mathbb{Z}_{17}^\times, \cdot)$.

Příklad 5.7: V $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ (grupa regulárních matic nad $\mathbb{Z}_3$) určete řády prvků $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6 Podgrupy

Příklad 6.1: Ukažte, že podmnožina kladných reálných čísel, resp. kladných racionálních čísel, resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Příklad 6.2: Ukažte, že množina sudých permutací tvoří podgrupu grupy $\mathbb{S}_n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 6.3: Popište všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Příklad 6.4: Popište všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$.

Příklad 6.5: Popište všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Příklad 6.6: Popište všechny podgrupy grupy $\mathbb{S}_3$, respektive grupy $\mathbb{A}_4$.

Příklad 6.7*: Popište všechny podgrupy grupy symetrií $\mathbb{D}_n$ (alespoň pro $n = 3, 4$).

Příklad 6.8: Určete podgrupu $\mathbb{S}_8$ generovanou množinou X:

1) $X = \{(4,5,2,1) \circ (4,6,3,1,5,2), (4,5,2,1) \circ (4,5,6) \circ (2,1,3)\}$,
2) $X = \{(1,5,8) \circ (1,4,2,5) \circ (1,5,2), (1,2,6,4,8,5) \circ (1,4,6,2)\}$,
3) $X = \{(1,8,2,3,5) \circ (1,2,6,7,8), (4,7,6,2) \circ (2,4,8)\}$,
4) $X = \{(1,2)(3,4), (2,3)(4,5)\}$.

5)* $X = \{(2,4,6), (4,7,2), (3,2,4)\}$.

Příklad 6.9*: Určete podgrupu $\mathbb{S}_n$ generovanou množinou $\{(1,2), (1,2,3,\ldots,n)\}$.

Příklad 6.10: V $(\mathbb{Z},+)$ určete podgrupu generovanou množinou $\{8, 30\}$.

Příklad 6.11: V $(\mathbb{Z}_{60},+)$ určete podgrupu generovanou množinou $\{[6]_{60}, [15]_{60}\}$.

Příklad 6.12: Nechť je dána grupa regulárních matic 2×2 nad $\mathbb{Z}_7$

$$\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_7) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \mid x, y, z, v \in \mathbb{Z}_7, xv - yz \neq [0]_7 \right\}$$

s operací násobení. Určete počet prvků grupy $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_7), \cdot)$. V grupě $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_7), \cdot)$ určete podgrupu generovanou prvkem $\begin{pmatrix} [1]_7 & [2]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 \end{pmatrix}$.

Příklad 6.13: V $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ (grupa regulárních matic řádu 2 nad $\mathbb{Z}_2$) určete podgrupu generovanou množinou X:

1) $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

2) $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

3) $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Podobně v $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ určete podgrupu generovanou množinou

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

Příklad 6.14: V grupě $(\mathbb{R},+)$, resp. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, určete podgrupu generovanou prvkem $\sqrt[3]{2}$.

Příklad 6.15: V grupě $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ určete podgrupu generovanou prvkem $\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 6.16*: Určete všechny konečné podgrupy grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, resp. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Příklad 6.17: V grupě z příkladu 2.1-3 určete podgrupu generovanou množinou prvků a) $\{3\}$, b) $\{6\}$, c) $\{3, 7\}$.

Příklad 6.18*: Určete všechny podgrupy grupy z příkladu 2.1-3.

Příklad 6.19: Nechť je dána grupa G a její dvě podgrupy H a K. Dokažte, že

$$\langle H \cup K \rangle = \{a_1 b_1 \dots a_n b_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in H, b_i \in K\}.$$

Příklad 6.20*: Ukažte, že libovolná podgrupa grupy $\mathbb{S}_n$, která není podgrupou grupy $\mathbb{A}_n$, obsahuje právě polovinu sudých permutací a má tudíž sudý počet prvků.

7 Homomorfismy a izomorfismy grup

Příklad 7.1: Dokažte, že $(\mathbb{Z}_7^\times, \cdot)$ je izomorfní s $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$ je izomorfní s $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$. (Ukažte, že předpis $f([a]_6) = [3]_7^a$ definuje izomorfismus $f : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, +)$.)

Příklad 7.2: U každého z následujících předpisů (kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$) rozhodněte zda zadává zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup.

$$\alpha, \overline{\alpha} : (\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_3, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$$

$$\alpha(([a]_4, [b]_3)) = [6a + 4b]_{12}$$

$$\overline{\alpha}(([a]_4, [b]_3)) = [a - b]_{12}$$

$$\beta : (\mathbb{Z}_3^\times, \cdot) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_5, +)$$

$$\beta(([a]_3, [b]_5)) = [b^{|a|}]_5$$

$$\gamma : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$$

$$\gamma(p/q) = q/p$$

$$\delta : (\mathbb{Z}_{15}, +) \to (\mathbb{Z}_5, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$$

$$\delta([a]_{15}) = ([a]_5, [a]_3)$$

$$\epsilon, \overline{\epsilon} : (\mathbb{Z}_3, +) \to (\mathbb{A}_4, \circ)$$

$$\epsilon([a]_3) = (1, 2, 4) \circ (1, 3, 2)^a \circ (1, 4, 2)$$

$$\overline{\epsilon}([a]_3) = (1, 2)(3, 4) \circ (1, 2, 3)^a$$

Příklad 7.3: U homomorfismů z příkladu 7.2 určete jádro a obraz homomorfismu.

Příklad 7.4: Dokažte, že předpis $f([a]_{20}) = (1, 2, 3, 4, 5)^a$ definuje homomorfismus $f : (\mathbb{Z}_{20}, +) \to (\mathbb{S}_7, \circ)$. Určete jeho jádro a obraz.

Příklad 7.5: Nechť $f : G \to H$ je izomorfismus grup. Ukažte, že řády prvků a a $f(a)$ jsou stejné. Co lze říci o řádech prvků a a $f(a)$ v případě, že $f : G \to H$ je (injektivní) homomorfismus.

Příklad 7.6: Popište všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_3, +)$ do grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$.

Příklad 7.7: Popište všechny injektivní homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ do grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$, respektive $(\mathbb{S}_4, \circ)$.

Příklad 7.8: Pro libovolnou grupu $(G, \cdot)$ označme $\mathrm{Aut}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ izomorfismus}\}$ množinu všech automorfismů grupy G a $\mathrm{End}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ homomorfismus}\}$ množinu všech endomorfismů grupy G. Ukažte, že $(\mathrm{End}(G), \circ)$, kde $\circ$ je skládání zobrazení, je monoid a $\mathrm{Aut}(G)$ je podmnožina invertibilních prvků, tj. $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ je grupa.

Příklad 7.9: Popište všechny endomorfismy a automorfismy grupy $(\mathbb{Z}, +)$. Určete čemu je izomorfní monoid $\mathrm{End}(\mathbb{Z})$ a grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

Příklad 7.10: Popište všechny endomorfismy a automorfismy grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$. Určete čemu je izomorfní monoid $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_n)$ a grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$.

Příklad 7.11*: Popište všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_k, +)$.

Příklad 7.12: Dokažte, že zobrazení $f : G \to G$ definované předpisem $f(x) = x^{-1}$ je izomorfismus právě tehdy, když grupa G je komutativní.

Příklad 7.13: Dokažte, že pro libovolné grupy G a H jsou grupy $G \times H$ a $H \times G$ izomorfní.

Příklad 7.14: Uvažme grupu $(G, \cdot)$ matic typu 3 krát 3 nad $\mathbb{Z}$, které jsou v horním trojúhelníkovém tvaru s jedničkami na hlavní diagonále, tj.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

kde $\cdot$ je násobení matic. Definujme nyní zobrazení $f : (G, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$, které matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

přiřadí číslo $a - c$. Dokažte, že zobrazení f je homomorfismus grup.

Příklad 7.15*: Nechť $X = \{1, \dots, n\}$. Ukažte, že grupa $(P(X), \div)$ z příkladu 1.3-4 je izomorfní grupě $\mathbb{Z}_2^n$. ($\mathbb{Z}_2^n$ je součin n kopií grupy $\mathbb{Z}_2$.)

Příklad 7.16*: Nechť $(G, \cdot)$ je grupa.

i) Dokažte, že pro libovolný prvek $a \in G$ je zobrazení ρ_a automorfismus grupy G, kde $\rho_a : G \to G$ je definováno vztahem $\rho_a(x) = axa^{-1}$. (Hovoříme o vnitřních automorfismech.)

ii) Ukažte, že množina všech vnitřních automorfismů $\mathrm{Inn}(G) = \{\rho_a \mid a \in G\}$ je podgrupa grupy $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.

iii) Dokažte, že zobrazeni $\rho : G \to \mathrm{Aut}(G)$ dané předpisem $\rho(a) = \rho_a$ je homomorfismus grup.

Příklad 7.17*:

i) Ukažte, že libovolný automorfismu grupy $\mathbb{S}_n$ zachovává paritu permutace.

ii) Dokažte, že pro $n > 2$ je grupa $\mathrm{Inn}(\mathbb{S}_n)$ izomorfní grupě $\mathbb{S}_n$.

iii) Dokažte, že $\mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n) \cong \mathbb{S}_n$ pro $n = 3, 4, 5$.

Příklad 7.18: Buď α homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ definovaný předpisem $\alpha([a]_{30}) = [6a]_{20}$. Dále nechť β je homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ do grupy $(\mathbb{S}_5, \circ)$ daný předpisem $\beta([b]_{20}) = (1, 2, 3, 4, 5)^b$. Určete jádra homomorfismů α, β a $\beta \circ \alpha$.

Příklad 7.19: U následujících předpisů (kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{S}_6$) rozhodněte zda zadávájí zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup. Odpovědi zdůvodněte!
1) $\alpha : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$, $\alpha(([a]_2, [b]_5)) = [a + b]_{10}$; $\beta : (\mathbb{S}_6, \circ) \to (\mathbb{S}_6, \circ)$, $\beta(s) = (1, 2) \circ s \circ (1, 2)$.
2) $\alpha : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$, $\alpha(([a]_2, [b]_5)) = [5a + 2b]_{10}$; $\beta : (\mathbb{S}_6, \circ) \to (\mathbb{S}_6, \circ)$, $\beta(s) = s^2$.
3) $\alpha : (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\alpha([a]_4) = i^a$; $\beta : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_3, +)$, $\beta(a) = [|a|]_3$.
4) $\alpha : (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\alpha([a]_5) = i^a$; $\beta : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_2, +)$, $\beta(a) = [|a|]_2$.

Příklad 7.20: U následujících předpisů (kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0 \neq p$) rozhodněte zda zadávájí zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup. Odpovědi zdůvodněte!
1) $\alpha : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $\alpha(\frac{p}{q}) = \frac{p^3}{q^3}$,
2) $\beta : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $\beta(\frac{p}{q}) = (-1)^{pq} \cdot \frac{p}{q}$,
3) $\gamma : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $\gamma(\frac{p}{q}) = (-1)^{p(p+q)q} \cdot \frac{q}{p}$.

8 Normální podgrupy

Příklad 8.1: Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{A}_n$ normální podgrupa grupy $\mathbb{S}_n$. Dokažte.

Příklad 8.2: Popište všechny normální podgrupy grup $(\mathbb{S}_3, \circ)$ a $(\mathbb{A}_4, \circ)$. (Povšimněte si, že existuje normální podgrupa N grupy H — normální podgurpy grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$ — která není normální podgrupou $(\mathbb{A}_4, \circ)$.)

Příklad 8.3: Označme následující podgrupy grupy $(\mathbb{S}_6, \circ)$: $G = \{f \in \mathbb{S}_6 \mid f \text{ sudá}\}$ a $H = \{f \in G \mid f(3) = 3\}$, tj. $H \subseteq G \subseteq \mathbb{S}_6$. Rozdodněte zda
a) H je normální podgrupa grupy $(G, \circ)$;
b) H je normální podgrupa grupy $(\mathbb{S}_6, \circ)$;
c) G je normální podgrupa grupy $(\mathbb{S}_6, \circ)$.
Odpovědi zdůvodněte!

Příklad 8.4*: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$. Dokažte, že $\mathbb{A}_n$ nemá vlastní normální podgrupy a že je to jediná netriviální normální podgrupa $\mathbb{S}_n$.

Příklad 8.5: Uvažme grupu $(\mathbb{GL}_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ regulárních matic dva krát dva nad racionálními čísly. Buď dále G, H a N následující množiny matic:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}^* \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^* \right\}.$$

Určete, zda se jedná o normální podgrupy.

Příklad 8.6: Buď dána následující grupa $(G, \cdot)$ matic ve speciálním tvaru s operací násobení matic a její podgrupa H:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Dokažte, že H je podgrupa grupy $(G, \cdot)$. Rozhodněte, zda H je normální podgrupa $(G, \cdot)$. Odpověď zdůvodněte!

Příklad 8.7: V příkladech 6.13, 6.14., 6.15 a 6.17 určete normální podgrupu generovanou danou množinou.

Příklad 8.8*: Které podgrupy z příkladu 6. 18 jsou normální?

Příklad 8.9*: Dokažte, že $\mathrm{Inn}(G)$ v 7.16-ii) je normální podgrupa.

Příklad 8.10: Buď dána grupa $(G, \circ)$ nekonstantních afinních zobrazení reálných čísel

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, \text{ pro vhodná } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$

s operací skládání zobrazení $\circ$. Uvažme v této grupě dvě podgrupy:

$$T = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax, a \in \mathbb{R}^*\},$$

$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}.$$

Která z nich je normální podgrupou grupy $(G, \circ)$? Popište u obou pravý i levý rozklad.

Příklad 8.11: Popište pravé a levé rozklady grupy $\mathbb{S}_3$ podle všech podgrup.

Příklad 8.12: Popište levý rozklad grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$ sudých permutací na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ podle podgrupy generované permutací $(2, 1, 4)$.

Příklad 8.13: Určete počet levých tříd grupy $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $H = \{(m, n)\ ;\ 6 \mid (m - 2n)\}$.

Příklad 8.14: Nechť konečná grupa $(G, \cdot)$ má sudý počet prvků $2n$ a H je její n prvková podgrupa. Dokažte, že H je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$.

9 Faktorizace grup

Příklad 9.1: Určete faktorgrupu z příkladu 8.10.

Příklad 9.2: Faktorizujte grupu $\mathbb{Z}$ podgrupou $k\mathbb{Z} = \{ka \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 9.3: Faktorizujte grupu $\mathbb{Z}_n$ podgrupou $k\mathbb{Z}_n = \{kz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} = \{[kz]_n \mid z \in \mathbb{Z}\}$, kde k dělí n.

Příklad 9.4: Určete, čemu je izomorfní faktorgrupa regulárních matic nad reálnými čísly podle podgrupy matic jejichž determinant je roven 1. ($\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbb{SL}_n(\mathbb{R}) \cong ?$)

Příklad 9.5: Víme, že množina

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \varepsilon \in \{1, -1\}, a \in \mathbb{Z} \right\}$$

společně s operací násobení matic tvoří grupu $(G, \cdot)$. Označme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\}$$

podmnožinu G. Ukažte, že H je normální podgrupa grupy G. Popište rozklad G/H, tj. charakterizujte kdy dvě matice $\begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \varepsilon' & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ náleží do stejné třídy rozkladu. Určete počet tříd rozkladu G/H. Určete, které grupě $(K, \cdot)$ je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$ pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

Příklad 9.6: Uvažme množiny reálných čísel $G = \{15^p 5^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ a $H = \{3^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ a operaci $\cdot$ (násobení reálných čísel). Zřejmě $(G, \cdot)$ je grupa.

1. Ukažte, že H je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$.
2. Pro $p, \overline{p}, q, \overline{q} \in \mathbb{Z}$ doplňte podmínku $(\cdots)$ tak, aby platilo:

$$15^p 5^q \text{ a } 15^{\overline{p}} 5^{\overline{q}} \text{ náleží do stejné třídy rozkladu } {}^{G}\!/_{H} \iff \cdots.$$

3. Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

Řešte stejné zadání pro množinu $H_1 = \{45^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ a $H_2 = \{25^r 27^s \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 9.7: Uvažme množiny reálných čísel $G = \{2^p 3^q 5^r \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}$ a $H = \{20^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ a operaci $\cdot$ (násobení reálných čísel). Zřejmě $(G, \cdot)$ je grupa.

1. Ukažte, že H je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$.
2. Pro $p, \overline{p}, q, \overline{q} \in \mathbb{Z}$ doplňte podmínku $(\cdots)$ tak, aby platilo:

$$15^p 5^q \text{ a } 15^{\overline{p}} 5^{\overline{q}} \text{ náleží do stejné třídy rozkladu } {}^{G}\!/_{H} \iff \cdots.$$

3. Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

Řešte stejné zadání pro množinu $H = \{8^x 15^y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 9.8: Faktorizujte aditivní grupu komplexních čísel podgrupou všech reálných čísel. ($(\mathbb{C}, +)/\mathbb{R} \cong ?$)

Příklad 9.9: Nechť je dána grupa matic

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

s operací nasobení. Dokažte, že podgrupa

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, a, c > 0 \right\}$$

je normální a určete faktorgrupu.

Příklad 9.10: Uvažujme normální podgrupu grupy $(G, +) = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ definovanou takto:

$$(a) : H = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 5 \mid a, 2 \mid b\},$$

$$(b) : H = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 7 \mid 2a + 3b\},$$

Určete, které grupě je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

Příklad 9.11*: V příkladu 8.2 jsme spočítali jednu netriviální normální podgrupu v $\mathbb{S}_4$ resp. $\mathbb{A}_4$, označme ji $\mathbb{V}_4$. Spočtete příslušné faktorgrupy. ($\mathbb{S}_4/\mathbb{V}_4 \cong ?, \mathbb{A}_4/\mathbb{V}_4 \cong ?$)

Příklad 9.12*: Dokažte, že až na izomorfismus existují pouze dvě $2p$ prvkové grupy a popište je. (Zde p je prvočíslo.)

Příklad 9.13*: Určete faktorgrupu z příkladu 8.5.

10 Konečné komutativní grupy, Centrum grupy, Sylowské podgrupy

Příklad 10.1: Určete všechny (až na izomorfismus) komutativní grupy, které mají $n = 24$ prvků. Totéž pro $n = 18, 30$.

Příklad 10.2: Pro libovolnou dvojici přirozených čísel m, n dokažte, že předpis $\alpha([a]_{m \cdot n}) = ([a]_n, [a]_m)$ zadává homorfismus z grupy $\mathbb{Z}_{mn}$ do grupy $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. Rozhodněte, pro která m, n je α izomorfismus.

Příklad 10.3: Určete pro které dvojice čísel m, n jsou grupy $\mathbb{Z}_{mn}$ a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ izomorfní.

Příklad 10.4: Určete rozklad grupy $(\mathbb{Z}_{21}^{\times}, \cdot)$ na součin netriviálních cyklických p-grup. Dejte příklad příslušného izomorfismu.

Příklad 10.5: Dokažte, že grupa, v níž pro každý prvek x platí $x \cdot x = 1$, je komutativní.

Příklad 10.6: Určete centrum grup: $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{A}_4$, $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$, $\mathbb{D}_4$.

Příklad 10.7: Určete všechny p-Sylowské podgrupy grupy $\mathbb{S}_4$.

Příklad 10.8: Určete všechny 3-Sylowské podgrupy grupy $\mathbb{S}_5$ a nějakou její 2-Sylowskou podgrupy.

Příklad 10.9: Pro libovolnou dvojici přirozených čísel m, n určete všechny p-Sylowské podgrupy grupy $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Příklad 10.10: Pro liché přirozené číslo n a prvočíslo p dělící $2n$, určete všechny p-Sylowské podgrupy grupy $\mathbb{D}_n$.

Příklad 10.11*: Pro sudé přirozené číslo n a prvočíslo p dělící $2n$, určete všechny p-Sylowské podgrupy grupy $\mathbb{D}_n$.

11 Doplňující příklady z teorie grup

Příklad 11.1: Buď $(G,\cdot)$ komutativní grupa. Ukažte, že pro dané $n \in \mathbb{N}$ tvoří množina $G_n = \{a \in G \mid a^n = 1\}$ podgrupu grupy $(G,\cdot)$. Ukažte dále, že množina všech prvků konečného řádu $\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \{a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}$ je taktéž podgrupou grupy $(G,\cdot)$.

Příklad 11.2: Nechť je dána grupa G a její dvě podgrupy H a K. Definujme nyní podmnožinu HK grupy G:

$$HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}.$$

Dokažte, že pokud je K normální podgrupa grupy G, potom je podmnožina HK podgrupou grupy G. Dále dokažte, že pokud jsou obě podgrupy H i K normální, potom je normální i podgrupa HK.

Příklad 11.3*: Nechť $(G,\cdot)$ je grupa, $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že grupa G obsahuje jedinný prvek řádu n (označme jej a). Dokažte, že tento prvek komutuje s libovolným prvkem grupy G, tj. $xa = ax$ pro libovolné $x \in G$.

Příklad 11.4*: Nechť G je grupa a označme G' podgrupu generovanou množinou prvků tvaru $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$, tj.

$$G' = \{[x_1,y_1][x_2,y_2]\dots[x_n,y_n] \mid n \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in G\}.$$

i) Dokažte, že G' je normální podgrupa grupy G.

ii) Ukažte, že faktorgrupa G/G' je komutativní grupa.

iii) Ukažte, že G/G' je "největší"komutativní faktorgrupa grupy G, tj. ukažte, že pokud H je normální podgrupa grupy G taková, že G/H je komutativní grupa, potom $G' \subseteq H$.

iv) Určete "největší"komutativní faktorgrupu pro grupu

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Totéž pro $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Q})$.

Příklad 11.5*:

i) Nechť $(G,\cdot)$ a $(H,\star)$ jsou grupy a nechť $\varphi : (H,\star) \to (\mathrm{Aut}(G),\circ)$ je homomorfismus grup. Definujme na $G \times H$ operaci $\diamond$ vztahem: $(a,b) \diamond (c,d) = (a \cdot \varphi(b)(c), b \star d)$. Dokažte, že $(G \times H, \diamond)$ je grupa.

ii) Ukažte, že součin grup $(G,\cdot) \times (H,\star)$ je speciálním případem $(G \times H, \diamond)$ pro vhodné φ.

iii) Nechť $(G,\cdot)$ je grupa. Definujme na $G \times G$ operaci $\diamond$ vztahem: $(a,b) \diamond (c,d) = (abcb^{-1}, bd)$. Dokažte, že $(G \times G, \diamond)$ je grupa.

Příklad 11.6*: Ukažte, že libovolná konečná grupa je izomorfní s podgrupou grupy $\mathbb{A}_n$ pro vhodné $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 11.7*: V následujících příkladech nerozlišujeme mezi obarveními, která mohou na sebe přejít nějakou rotací.

- Kolika způsoby můžeme obarvit hrany krychle n barvami?
- Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy krychle n barvami?
- Na každou ze stěn krychle máme nakreslit jednu úhlopříčku. Kolik různých krychlí můžeme získat?
- Na každou ze stěn krychle máme nakreslit šipku mířící diagonálně od jednoho vrcholu k protějšímu. Kolik různých krychlí můžeme získat?
- Jak se změní odpověď v předchozích dvou bodech, máme-li na libovolně mnoha stěnách povoleno také žádnou úhlopříčku (šipku) nekreslit?
- Kolika způsoby můžeme obarvit stěny krychle, mají-li být dvě bílé, dvě černé a dvě červené?

Příklad 11.8*: Kolika způsoby můžeme obarvit strany pravidelného 15-úhelníka n barvami? Zde nerozlišujeme mezi obarveními, která mohou na sebe přejít nějakou rotací nebo osovou symetrií.