

Rovnice matematické fyziky M4010

Tento text obsahuje příklady a návody do cvičení k předmětu, je průběžně opravován a doplňován. Tato verze je k datu
April 27, 2016.

Cvičení PDE 0.

Opakování obyčejných diferenciálních rovnic (první řád: Picardova a Peanova věta, Lipschitzova podmínka, rovnice separovatelné, rovnice s homogenní funkcí, rovnice převoditelné na separaci, lineární, Bernoulliho, exaktní, Clairautova a Lagrangeova rovnice, vyšší řád: lineární s konstantními koeficienty, metoda variace konstant, speciální pravá strana, soustavy rovnic. Skripta Roman Plch: Příklady z matematické analýzy, Diferenciální rovnice

Cvičení PDE 1.

Opakování parciální derivace, derivace složené funkce, převod operátorů a PDE do nových proměnných. Pojmy (definujte): Parciální derivace, druhá a vyšší parciální derivace, Schwarzova věta, derivace ve směru, operátor rotace, gradientu, divergence, Laplaceův operátor.

1. S využitím vzorců

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x, \quad z_y = z_u u_y + z_v v_y$$

odvďte vzorce pro převod z_{xx} , z_{yy} , z_{xy} .

Řešení:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_{uu} u_x^2 + 2z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} \\ z_{yy} &= z_{uu} u_y^2 + 2z_{uv} u_y v_y + z_{vv} v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy} \\ z_{xy} &= z_{uu} u_x u_y + z_{uv} [u_x v_y + u_y v_x] + z_{vv} v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy} \end{aligned}$$

2. Vypočtěte parciální derivace následujících funkcí podle všech proměnných prvního (případně i druhého) řádu:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^2 \sqrt{y}}{\operatorname{arctg}(x - 2y)} \\ z &= \cos \sqrt{xy} (x^2 + y^2) \\ z &= \sqrt{\arccos \frac{xy - x^2}{x^2 + y + 1}} \\ u &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot e^{xyz} \\ u &= (x \sin y \cos z)^{(x-y+\sqrt{z})} \end{aligned}$$

3. Převeďte PDE do nových proměnných u a v :

- a) $z_{xx} - z_{yy} = 0, u = x + y, v = x - y$
(řešení: $4z_{uv} = 0$)
- b) $z_{xx} - y^4 z_{yy} - 2y^3 z_y = 0, u = x + \frac{1}{y}, v = x - \frac{1}{y}$
(řešení: $4z_{uv} = 0$)
- c) $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} + x z_x - y z_y = 0, u = xy, v = \frac{x}{y}$
(řešení: $4uv z_{uv} = 0$)

d) $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} - 2yz_y - 2xz_x = 0, u = x + y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

e) $y^2 z_{xx} + x^2 z_{yy} - 2xy z_{xy} = 0, u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = xy$
 (řešení: $(u^2 - 4v^2) z_{uv} + \frac{u^2 - 2v^2}{u^3} z_u = 0?$)

f) $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x, u = x + y, v = \frac{y}{x+y}$

g) $z_{xx} - yz_{yy} - \frac{1}{2}z_y = 0, u = x - 2\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$
 (řešení: $z_{uv} = 0$)

h) $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} - \frac{1}{2}z_y = 0, u = x + y, v = \frac{1}{x-y}$

i) $xz_{xx} - yz_{yy} = 0, u = \sqrt{x} + \sqrt{y}, v = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
 (řešení: $(u^2 - v^2) z_{uv} + 4vz_u - 4uz_v = 0?$)

4. Navíc Převeďte Laplaceův operátor do válcových a kulových souřadnic. Případně převeďte i další operátory (gradiend, rotace, divergence).

Řešení:

$$\Delta_{kulove} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$\Delta_{valcove} = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}$$

Domácí úkol: Vymyslete a vypočtete příklad podobný jako 2 (výpočet parciální derivace), 3 (převod PDE do nových souřadnic), 4 (převod operátoru do nových souřadnic).

Cvičení PDE 2.

Opakování Fourierových řad, Fourierova a Laplaceova transformace, konvoluce funkcí. Pojmy: skalární součin, ortogonalita, ortonormalnost, ortogonální projekce, ortogonální posoupnost, Fourierova řada, Fourierovy koeficienty, Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost, stejnoměrná a bodová konvergence, Dirichletova věta, liché, sudé, periodické rozšíření funkce. Další příklady Došlá, Novák: Nekonečné řady.

Fourierova řada funkce f vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\varphi_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \cdot \varphi_n,$$

kde (\cdot, \cdot) je skalární součin.

1. Navíc Ukažte ortogonalitu systému $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Ukažte, že Fourierova řada 2π -periodické funkce má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2. Jak bude vypadat rozvoj $2h$ -periodické funkce integrovatelné na intervalu $[-h, h]$?

Řešení:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x,$$

kde

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x dx, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Pozn.: Podobně postupujte na libovolném intervalu $[a, b]$.

3. Navíc Vyjádřete Fourierovu řadu v oboru \mathbf{C}

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}.$$

(Využijte vztahů

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ c_n &= \frac{a_n - b_n i}{2}, & c_{-n} &= \frac{a_n + b_n i}{2}. \end{aligned}$$

4. Nalezněte Fourierovu řadu funkce

- a) $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi]$
 (řešení: $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$)
- b) $f(x) = e^x$ na $[0, 2\pi]$
 (řešení: $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi} [\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2+1} \cos nx - \frac{n}{n^2+1} \sin nx)]$)
- c) $f(x) = x$ kosinovou řadu na $[0, \pi]$
 (řešení: $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx$)
- d) $f(x) = x$ na $[-1, 1]$
 (řešení: $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\pi x$)
- e) $\text{sgn}(x)$ na $[-\pi, \pi]$ (řešení: $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$)
- f) $f(x) = 0$ pro $x \in [-\pi, 0]$, $f(x) = \sin x$ pro $x \in [0, \pi]$ (řešení: $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$)
- g) $f(x) = \cos x$ pro $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = -\cos x$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ — kosinovou řadu. (řešení: $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$)
- h) $f(x) = |x|$ na $(-l, l)$ (řešení: $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{l}$)

Domácí úkol:

Výpočet alespoň jedné Fourierovy řady nějaké funkce.

Zopakovat (více ve cvičení 6):

Konvoluce funkcí f a g :

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Fourierův obraz funkce f :

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Laplaceův obraz funkce f :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Cvičení PDE 3.

PDE prvního řádu pro funkci dvou proměnných: lineární homogenní, quasi-lineární, obecná, lineární nehomogenní. Quasilineární rovnice pro funkci n -proměnných. Metoda charakteristik a metoda převodu na kanonický tvar.

Návody pro cvičené opice:

Lineární homogenní rovnice:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$$

Řešení metodou charakteristik, tj. soustavou rovnic:

$$x'(s) = a(x, y), \quad y'(s) = b(x, y).$$

Soustava má řešení $x = x(s)$, $y = y(s)$. Je-li $\phi(x, y) = C$ implicitní popis charakteristických trajektorií, pak funkce $u(x, y) = \Phi(\phi(x, y))$ je řešení rovnice. Jaká je geometrická interpretace téhož úlohy?

Okrajová úloha pro lineární rovnici vznikne přidáním podmínky:

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma)$$

Do řešení soustavy $x = x(s, C_1, C_2)$, $y = y(s, C_1, C_2)$ dosadíme za $s = 0$ a z rovnic $x(0, C_1, C_2) = \varphi(\sigma)$, $y(0, C_1, C_2) = \psi(\sigma)$ určíme konstanty C_1 a C_2 . Po dosazení vypočtených konstant zpět do rovnic $x = x(s, \sigma)$, $y = y(s, \sigma)$ vyjádříme σ pomocí x a y a dosadíme do $u = f(\sigma)$ dostaneme řešení počáteční úlohy, které je jediné:

$$u(x, y) = f(\sigma(x, y)).$$

1. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy, u rovnic bez okrajové podmínky zvolte vhodnou křivku, zadejte okrajovou podmínku a určete řešení:

- a) $xu_x + yu_y = 0$
(řešení $u = \Phi(y/x)$ nebo $u = \Phi(x/y)$)
- b) $yu_x + xu_y = 0$
(řešení $u = \Phi(x^2 - y^2)$)
- c) $yu_x - xu_y = 0$, $x = \sigma$, $y = \sigma$, $u(\sigma, \sigma) = 2\sigma^2$
(řešení $u = x^2 + y^2$)
- d) $\sin x \sin y u_x + \cos x \cos y u_y = 0$, $u = \cos 2y$ na $x + y = \frac{\pi}{2}$
(řešení: $u = 2 \cos y \sin x - 1$)
- e) $\sin x \sin y u_x + \cos y \cos y u_y = 0$
(řešení: $u = \Phi\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot e^{-\frac{2}{\cos y}}\right)$)

Quasilineární rovnice

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

Řešení metodou charakteristik, tj. soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}x'(s) &= a(x, y, u) \\y'(s) &= b(x, y, u) \\u'(s) &= c(x, y, u)\end{aligned}$$

Je-li $\varphi_1 = \varphi_1(x, y, u)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x, y, u)$ implicitní popis řešení této soustavy, pak řešení původní rovnice je dáno implicitně vztahem:

$$\Phi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0.$$

Okrajová úloha pro quasilineární rovnici vznikne přidáním podmínky:

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma)$$

Do řešení $x = x(s, C_1, C_2, C_3)$, $y = y(s, C_1, C_2, C_3)$, $u = u(s, C_1, C_2, C_3)$ dosadíme za $s = 0$ a z rovnic $x(0, C_1, C_2, C_3) = \varphi(\sigma)$, $y(0, C_1, C_2, C_3) = \psi(\sigma)$, $u(0, C_1, C_2, C_3) = f(\sigma)$ určíme konstanty C_1, C_2, C_3 . Dosazením vypočtených konstant do rovnic $x = x(s, \sigma)$, $y = y(s, \sigma)$ pak vyjádříme s a σ pomocí x a y a dosadíme do třetí rovnice $u = u(s, C_1(\sigma), C_2(\sigma), C_3(\sigma))$, tak získáme řešení počáteční úlohy, které je jediné:

$$u = u(s(x, y), C_1(\sigma(x, y)), C_2(\sigma(x, y)), C_3(\sigma(x, y))).$$

2. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy:

- a) $xu_x + yu_y = 2u$, $x = \cos \sigma$, $y = \sin \sigma$, $u(\cos \sigma, \sin \sigma) = 1$
(řešení $u = x^2 + y^2$)
- b) $yu_x + xu_y = 2u$
(řešení $u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_1 = \frac{(x+y)^2}{u}$, $\varphi_2 = (x-y)^2u$)
- b1) $yu_x + xu_y = 2u$, $u(x, 0) = 1$
(řešení $u = (x+y)/(x-y)$)
- b2) $yu_x + xu_y = 2u$, $u(x, 0) = x^2$
(řešení $u = (x+y)^2$)
- c) raději neřešit $(u+y)u_x + (u+x)u_y = x+y$
- d) $u_x + u_y = u^2$, $u(x, 0) = g(x)$
(řešení $u = \frac{g(x-y)}{1-yg(x-y)}$ zkontrolovat)

- e) $xu_y - yu_x = u$, v prvním kvadrantu, $u(x, 0) = g(x)$
 (řešení $u = g(\sqrt{x^2 + y^2})e^{\arctan \frac{y}{x}}$ zkontrolovat)

Obecná rovnice prvního řádu s okrajovou podmínkou:

$$F(x, y, u, u_x = p, u_y = q) = 0$$

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma)$$

Řešení metodou charakteristik, tj. soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x'(s) &= F_p \\ y'(s) &= F_q \\ u'(s) &= pF_p + qF_q \\ p'(s) &= -F_x - pF_u \\ q'(s) &= -F_y - qF_u \\ 0 &= F(x(0), y(0), u(0), p(0), q(0)) \quad (\text{počáteční podmínka}) \end{aligned}$$

Z derivace okrajové podmínky $f' = p\varphi' + q\psi'$, tj. speciálně

$$f' = p_0\varphi' + q_0\psi'$$

a rovnice

$$F(\varphi(\sigma), \psi(\sigma), f(\sigma), p_0, q_0) = 0$$

vypočteme p_0 a q_0 . Z počáteční podmínky pro soustavu:

$$\begin{aligned} x(0) &= \varphi(\sigma) \\ y(0) &= \psi(\sigma) \\ u(0) &= f(\sigma) \\ p(0) &= p_0 \\ q(0) &= q_0 \end{aligned}$$

Určíme konstanty C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 a dosadíme do řešení:

$$x = x(s, C_1(\sigma), C_2(\sigma), C_3(\sigma), C_4(\sigma), C_5(\sigma)),$$

$$y = y(s, C_1(\sigma), C_2(\sigma), C_3(\sigma), C_4(\sigma), C_5(\sigma)). \text{ Vyjádříme } s = s(x, y), \sigma = \sigma(x, y)$$

a najdeme řešení okrajové úlohy, které je jediné:

$$u(x, y) = u(s(x, y), C_1(\sigma(x, y)), C_2(\sigma(x, y)), C_3(\sigma(x, y)), C_4(\sigma(x, y)), C_5(\sigma(x, y))).$$

3. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy:

a) $xu_x^2 + yu_y^2 = u$, $u(\sigma, \sigma) = 2\sigma$
 (řešení $u = x + y$)

b) $xu_x^2 + yu_y^2 = u$, $u(1, y) = 1$
 (řešení $u = x$ a $u = (2 - \sqrt{x})^2$)

b) $u_x y_y = u, u(0, y) = y^2$
 (řešení $u = (y + \frac{x}{4})^2$)

Lineární nehomogenní rovnice:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u)$$

Řešení převodem na kanonický tvar:

Řešíme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

Původní rovnici transformujeme do novým proměnných $\xi = \varphi(x, y), \eta = y$, kde $\varphi(x, y) = C$ je implicitní popis řešení obyčejné rovnice. Transformací získáme kanonický tvar

$$u_\eta(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, u),$$

který vyřešíme integrací.

4. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy:

- a) Řešte rovnice, u kterých je to možné, z předchozích zadání převodem na kanonický tvar.
- b) $xu_x + yu_y = 2u$
 (řešení $u = k(\frac{y}{x}) \cdot y^2$)
- c) $yu_x + u_y = -u$
 (řešení $u = k(y^2 - 2x) \cdot e^y$)
- d) $u_x + u_y = -u(x - y)$
 (řešení $u = k(y - x) \cdot e^{y^2 - xy}$)
- e) $x^2u_x + xyu_y = u^2$
 (řešení $u = \frac{x}{1+xC(\frac{y}{x})} = \frac{xy}{y+xyD(\frac{y}{x})}$)
- e1) $x^2u_x + xyu_y = u^2, u(1, y) = y$
 (řešení $u = \frac{xy}{y+x^2-xy}$)
- e2) $x^2u_x + xyu_y = u^2, u(\cos \sigma, \sin \sigma) = 1$
 (řešení $u = \frac{x}{1+x \left[1 - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right]}$)
- e3) $x^2u_x + xyu_y = u^2, u(x, 1-x) = x$
 (řešení $u = \frac{x^2}{x+y^2+xy}$)

Quasilineární rovnice pro funkci n proměnných s okrajovou podmínkou:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) u_{x_i} = f(x_1, \dots, x_n, u),$$

$$x_i = \varphi_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad u(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}).$$

Řešení metodou charakteristik:

je analogické (ale pracné, proto to ani nebudeme zkoušet). Řešíme soustavu $n + 1$ rovnic $x'_i = a_i, i = 1, \dots, n, u' = f$. Dosadíme $s = 0$, určíme konstanty, vyjádříme $s, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ z n rovnic pro x_i a dosadíme do řešení $u = u(s(x_1, \dots, x_n), \sigma(x_1, \dots, x_n))$.

Transportní rovnice

5. Ukažte, že řešení *transportní rovnice* pro funkci $u = u(t, x, y, z)$ a vektor $\vec{b} = (b^1, b^2, b^3)$

$$u_t + \vec{b} \cdot (u_x, u_y, u_z) = f(t, x, y, z)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, x, y, z) = g(x, y, z)$$

je

$$u(t, x, y, z) = g(x - b^1 t, y - b^2 t, z - b^3 t) + \int_0^t f(\xi, x - b^1(t - \xi), y - b^2(t - \xi), z - b^3(t - \xi)) d\xi.$$

Dále ukažte, že řešení rovnice

$$u_t + \vec{b} \cdot (u_x, u_y, u_z) + cu = 0, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta}$$

je

$$u(t, x, y, z) = g(x - b^1 t, y - b^2 t, z - b^3 t) e^{-ct}.$$

Navrhněte konkrétní příklady transportních rovnic s počátečními podmínkami a vyřešte.

Cvičení ze skript Franců:

6. Nalezněte obecné řešení následujících lineárních rovnic:

a) $xu_x - yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$

- b) $yu_x - xu_y + 2xyu_z = 0$
- c) $xu_x + 2yu_y - (2x^2 + 4y^2)u_z = 0$
- d) $xu_x + yu_y + 2zu_z = 0$
- e) $u_x + yu_y + 2zu_z = 0$

7. Nalezněte obecné řešení následujících kvazilineárních rovnic i řešení splňující uvedenou podmínku:

- a) $xu_x - yu_y = x^2 + y^2$, $u(x, -x) = x^2$
- b) $yu_x - xu_y = 2xy$, $u(x, x) = 2x^2 - 1$
- c) $xu_x + 2yu_y + (2x^2 + 4y^2) = 0$, $u(x, x) = 1 - x^2$
- d) $xu_x + yu_y = 2u$, $u(x, 1) = x$
- e) $u_x + yu_y = 2u$, $u(x, 1) = e^x$
- f) $yuux + xuyy = 2xy$, $u(x, 0) = 2x$
- g) $2xu_x - yu_y = x^2 + y^2$, $u(2, y) = 1 - y^2$
- h) $x^2u_x + yu_y = 2u$, $u(1, y) = y^3$
- i) $u_x - y^2u_y = u^2$, $u(x, 1) = \frac{1}{2x}$
- j) $xu_x + yu_y = 2(x^2 + y^2)$, $u(1, y) = 2y^2 + 1$

8. V rovnicích určete a načrtněte charakteristiky, napište obecné řešení, zvolte si vhodnou podmínku a určete partikulární řešení. Spočtené řešení ověřte zkouškou.

- a) $u_x + 3u_y = 0$
- b) $2u_x - u_y = 0$
- c) $u_x + yu_y = 0$
- d) $u_x + xu_y = 0$
- e) $xu_x + yu_y = 0$
- f) $xu_x - yu_y = 0$
- g) $yu_x + xu_y = 0$
- h) $yu_x - xu_y = 0$
- i) $xu_x + 2yu_y = 0$

$$\text{j) } xu_x - 2yu_y = 0$$

$$\text{k) } yu_x + 2xu_y = 0$$

$$\text{l) } yu_x - 2xu_y = 0$$

Domácí úkol:

Vyřešení třech homogenních lineárních rovnic, nákres charakteristik. Vyřešení dvou nehomogenních lineárních rovnic obecně, poté s okrajovou podmínkou, obrázek. Řešte jak převodem na kanonický tvar, tak pomocí metody charakteristik (pro quasilineární rovnice). Vyřešení jedné quasilineární a jedné obecné rovnice s okrajovou podmínkou metodou charakteristik.

Cvičení PDE 4.

Klasifikace lineárních PDE druhého řádu, Sylvestrův zákon, signatura kvadratických forem. Metoda převodu na kanonický tvar - výpočet nových proměnných.

Klasifikace rovnic pro dvě proměnné:

Rovnice

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

je

- **hyperbolická**, jestliže $B^2 - AC > 0$, kanonický tvar:

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

- **parabolická**, jestliže $B^2 - AC = 0$, kanonický tvar:

$$u_{\xi\xi} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

- **eliptická**, jestliže $B^2 - AC < 0$, kanonický tvar:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta,\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

Charakteristická rovnice je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

tj.

H $y' = \frac{1}{A} [B \pm \sqrt{B^2 - AC}]$ pro hyperbolickou,

P $y' = \frac{B}{A}$ pro parabolickou,

E nemá reálné charakteristiky pro eliptickou rovnici, $y' = \frac{1}{A} [B \pm i\sqrt{AC - B^2}] = \mu \pm i\nu$.

(Transformace do nových souřadnic $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ musí splňovat $\xi_x\eta_y \neq \xi_y\eta_x$.)

Hyperbolická rovnice

Transformujeme ji do nových proměnných $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, kde $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$ je implicitní vyjádření charakteristik (řešení H).

Parabolická rovnice

Transformujeme ji do nových proměnných $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, kde $\psi(x, y) = C_2$ je implicitní vyjádření charakteristiky (řešení P) a $\varphi(x, y)$ je libovolná nezávislá funkce.

Eliptická rovnice

Transformujeme ji do nových proměnných $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, kde $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$, $\psi(x, y) = \frac{1}{2i}(\Phi - \Psi)$ a $\Phi(x, y) = C_1$, $\Psi(x, y) = C_2$ je implicitní vyjádření charakteristiky (řešení E).

Rovnice s konstantními koeficienty Řešení rovnice

$$Au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = du_x + eu_y + fu + g(x, y)$$

můžeme (po předchozí transformaci) hledat ve tvaru $u = ve^{\lambda\xi + \mu\eta}$, $v = v(\xi, \eta)$ a vhodnou volbou konstant λ a μ převést na jednodušší tvar.

1. Klasifikujte a převedte rovnici na kanonický tvar (s výjimkou eliptických naleznete řešení):

- a) $yu_{yy} - xu_{xy} + u_y = 0$
(řešení: hyperbolická, $\xi = x$, $\eta = xy$, $u_{\xi\eta} = 0$, $u = F(x) + G(xy)$)
- b) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - x^2u_x + (x+2)yu_y = 0$
(řešení: parabolická, např. $\xi = xy$, $\eta = x$, $\eta^2(u_{\eta\eta} - u_\eta) = 0$, $u = e^x \cdot C(xy) + D(xy)$?)
- c) $y^2u_{yy} + x^2u_{yy} = 0$ (řešení: eliptická, $\xi = y^2$, $\eta = x^2$, $2\xi\eta\Delta u = -\xi u_\eta - \eta u_\xi$)
- d) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
(řešení: eliptická, $\xi = x - 2y$, $\eta = \sqrt{7}x$, $\Delta u = 0$)

Cvičení ze skript Franců:

Klasifikujte a převedte rovnici na kanonický tvar

- a) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_x = 0$
- b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 2u_x + u_y$
- c) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
- d) $u_{xx} + u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
- e) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$
- f) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$
- g) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$
- h) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$
- i) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_x + 5u_y + 4u = 0$
- j) $5u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} = u_y$

$$\text{k) } u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = u_x + u_y$$

$$\text{l) } u_{xx} - 7u_{xy} + 12u_{yy} = u_x$$

$$\text{m) } u_{xx} + 2u_{xy} - 15u_{yy} = u_y + u$$

$$\text{n) } 3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 3u_x - u_y$$

Domácí úkol

Převeďte na kanonický tvar jednu eliptickou, jednu parabolickou a jednu hyperbolickou rovnici.

Cvičení PDE 5.

Řešení počáteční úlohy pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných.

1. Homogenní hyperbolická rovnice (kmity nekonečné struny)

Rovnice

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty),$$
$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

má řešení

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

2. Homogenní hyperbolická rovnice (kmity nekonečné struny) s obecným počátkem

Rovnice

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (\sigma, \infty) \times (-\infty, \infty),$$
$$u(\sigma, x) = \varphi(x), \quad u_t(\sigma, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

má řešení

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - a(t - \sigma)) + \varphi(x + a(t - \sigma))}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \psi(\xi) d\xi.$$

3. Nehomogenní hyperbolická rovnice s homogenní počáteční podmínkou (buzené kmity nekonečné struny)

Rovnice

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty),$$
$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

má řešení

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma.$$

4. Obecná počáteční úloha pro nehomogenní hyperbolickou rovnici

Rovnice

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty),$$
$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

má řešení

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma.$$

5. Obecná počáteční úloha pro nehomogenní hyperbolickou rovnici s jednou okrajovou podmínkou (kmity nekonečné struny upevněné na jednom konci)

Rovnice

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), & (t, x) &\in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & u_t(0, x) &= \psi(x), & x &\in (0, \infty), \\ u(t, 0) &= 0, & t &\in (0, \infty), \end{aligned}$$

má řešení

$$u(t, x) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \tilde{f}(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma,$$

kde $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, \tilde{f} jsou lichá rozšíření funkcí φ , ψ , f .

(Je-li okrajová podmínka nehomogenní $u(t, 0) = \alpha(t)$ je řešení

$$u(t, x) = v(t, x) + \alpha(t),$$

kde $v(t, x)$ je řešení předchozí úlohy, ve které $f(t, x)$ nahradíme $f(t, x) - \alpha''(t)$, $\psi(x)$ nahradíme $\psi(x) - \alpha'(0)$ a $v(t, 0) = 0$.)

6. Obecná počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici s okrajovými podmínkami Dirichletova typu (kmity konečné struny upevněné na obou koncích)

Rovnice

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), & (t, x) &\in (0, \infty) \times (0, l), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & u_t(0, x) &= \psi(x), & x &\in (0, l), \\ u(t, 0) &= u(t, l) = 0, & t &\in (0, \infty), \end{aligned}$$

má řešení

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \sin \frac{n\pi}{l} x + \int_0^t \int_0^l f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma,$$

kde

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{a\pi}{l}, \\ A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \\ B_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \\ G(x, \xi, t - \sigma) &= \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi \sin \frac{n\pi a}{l} (t - \sigma).\end{aligned}$$

(Pro nehomogenní okrajovou podmínku $u(t, 0) = \alpha$, $u(t, l) = \beta$ je $u = v(t, x) + U(t, x)$, kde $U(t, x) = \alpha(t) + \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t))$ a $v(t, x)$ je řešení předchozí úlohy ve které $f(t, x)$ nahradíme $f(t, x) - U_{tt}(t, x) + a^2 U_{xx}(t, x)$, $\varphi(x)$ nahradíme $\varphi(x) - U(0, x)$, $\psi(x)$ nahradíme $\psi(x) - U_t(0, x)$ a $v(t, 0) = v(t, l) = 0$.)

1. Nalezněte řešení:

- a) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = x \cos x$
 (řešení: $u = \frac{1}{2} [\sin(x-t) + \sin(x+t)] + (x+t) \sin(x+t) + \cos(x+t) - (x-t) \sin(x-t) - \cos(x-t)$)
- b) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = 2x$, $u_t(x, 0) = \ln(1+x^2)$
 (řešení: $u = 2x + \frac{1}{2} [(x+t) \ln(1+(x+t)^2) - 2(x+t) + 2 \arctan(x+t) - (x-t) \ln(1+(x-t)^2) + 2(x-t) - 2 \arctan(x-t)]$)
- c) $u_{tt} - u_{xx} = \sin x$, $u(x, 0) = x$, $u_t(x, 0) = \frac{1}{x}$
 (řešení: $u = x + \ln \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} + \sin x - \sin x \cos t$?)

Domácí úkol: Najděte řešení nehomogenní hyperbolické rovnice s obecnou počáteční podmínkou

- bez okrajové podmínky
- s jednou okrajovou podmínkou
- se dvěma okrajovými podmínkami

Cvičení PDE 6.

Metoda integrálních transformací.

O všech funkcích, jejichž Fourierův obraz potřebujeme, předpokládáme, že $f \in L^1(\mathbf{R})$, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Konvoluce:

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

1. Dokažte komutativitu a asociativitu konvoluce.

Fourierův obraz funkce f :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

(\hat{f} obecně nemusí být prvkem $L^1(\mathbf{R})$.)

Inverzní Fourierův obraz funkce g :

$$\check{g}(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi x} d\xi.$$

(pro stejnoměrně spojitou funkci $f \in L^1(\mathbf{R})$ a je-li $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ platí $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f)]$.)

2. Dokažte některé z vlastností Fourierovy transformace:

Vlastnosti Fourierovy transformace:

- Je-li $f \in L^1(\mathbf{R})$ omezená, pak \hat{f} je spojitá
- Linearita $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$
- Změna měřítka pro $f_R(x) = f(Rx)$, $R > 0$: $\hat{f}_R(\xi) = \frac{1}{R} \hat{f}\left(\frac{\xi}{R}\right)$
- Transformace derivace, je-li $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$: $\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$
- Derivace transformace: $\frac{d\hat{f}}{d\xi} = -ix \hat{f}(x)$

- f) Transformace konvoluce: $\mathcal{F}(f \star g)(x) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
- g) Transformace posunutí pro $f_a(x) = f(x - a)$: $\hat{f}_a(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}$
- h) Posunutí transformace: $\mathcal{F}(fe^{iax})(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$
- i) Základní identita: $\int_{-\infty}^{\infty} f\hat{g} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}g$
- h) Zobrazení $f \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ je L^2 -izometrie na množině $L^1 \cap L^2$ (tj. zachovává normu).

Rovnice vedení tepla

3. Pomocí Fourierovy transformace převedte rovnici

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^+$$

na tvar (jehož řešení naleznete):

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -\kappa\xi^2\hat{u}(\xi, t)$$

Řešení počáteční úlohy

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^+$$

je pak dáno konvolucí

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} dy$$

Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici

$$u_t = \kappa u_{xx} + f(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^+$$

je dáno vztahem

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y, \sigma) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa(t-\sigma)}} dy d\sigma$$

4. Pomocí těchto vzorců a "errorfunkce" $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ vyjádřete řešení následujících úloh.

- a) $u_t = u_{xx}$, $u(x, 0) = 1$ pro $x \in (-1, 1)$, jinak nula
 (řešení: $u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right) \right]$)
- b) příklady z textu k přednáškám, str. 34

Cvičení PDE 7.

Metoda separace proměnných (Fourierova)

Řešení rovnice hledáme ve tvaru

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Dosadíme do rovnice a řešíme separací proměnných.

I. Pro parabolickou rovnici $u_t = k u_{xx}$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \varphi(x)$ dostáváme

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

a tedy

$$T = ce^{-\lambda kt}, \quad X = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}, \quad \mu^2 + \lambda = 0$$

Dosadíme do okrajových podmínek

A. Dirichletovy: $u(0, t) = u(l, t) = 0 \implies$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt},$$

kde c_n určíme z počáteční podmínky

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

B. Neumannovy: $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \implies$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt},$$

kde c_n určíme z počáteční podmínky

$$c_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

C. Smíšené 1: $x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \implies$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{l} e^{-\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2 kt}.$$

D. Smíšené 2: $x_x(0, t) = u(l, t) = 0 \implies$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2 kt}.$$

E. Jiné (např. Newtonovy): postupujeme podobně, ale výpočty jsou složitější, koeficienty c_n jsou vždy koeficienty rozvoje funkce $\varphi(x)$ do příslušné Fourierovy řady.

II. Pro hyperbolickou rovnici $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ s počátečními podmínkami $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, dostáváme

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

a tedy

$$T_n = a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} at) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n} at),$$

u X postupujeme stejně jako v případě parabolické rovnice — čísla $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ určíme dosazením do okrajových podmínek a čísla a_n a b_n jsou koeficienty rozvoje do příslušných Fourierových řad dané počátečními podmínkami:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx, \quad b_n = \frac{2}{l\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \varphi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx.$$

III. Pro eliptickou rovnici $\Delta u(x, y) = 0$ dostáváme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

a tedy

$$Y_n = A_n e^{\sqrt{\lambda_n} y} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n} y},$$

u X postupujeme stejně jako v případě parabolické a hyperbolické rovnice — čísla $\sqrt{\lambda_n}$, A_n a B_n určíme z dalších zadaných podmínek.

1. Pro uvedené typy okrajových podmínek (A, B, C, D — Dirichletovy, Neumannovy, smíšené) proveďte pečlivě výpočet řešení rovnice $X'' + \lambda X = 0$. Ukažte, že ve všech čtyřech případech je λ nezáporné a tedy X lze do okrajových podmínek dosazovat ve tvaru $X = C \cos \beta x + D \sin \beta x$, i $\beta = \mu = \sqrt{-\lambda}$ resp. $\beta = \sqrt{\lambda}$.

2. Řešte následující rovnice metodou separace proměnných

a) $u_t = u_{xx}$, $u(0, t) = u_x(a, t) = 0$, $u(x, 0) = x(2a - x)$

Řešení:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right]^2 t} \sin \frac{2n+1}{2a} \pi x, \quad c_n = \frac{2}{a} \int_0^a x(2a-x) \sin \frac{2n+1}{2a} \pi x dx.$$

b) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(0, t) = u(a, t) = 0$, $u(x, 0) = x(a - x)$, $u_t(x, 0) = 0$ Řešení:

$$u(t, x) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}.$$

c) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(0, y) = u(a, y) = u(x, a) = 0$, $u(x, 0) = x(a - x)$ Řešení:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \left(a_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{1 - e^{2n\pi}} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a x(a - x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{1 - e^{-2n\pi}} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a x(a - x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx.$$

d) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$, $u(0, y) = \sin y$, $u(\pi, y) = 0$, $u(x, 0) = 0 = u(x, \pi)$.

Řešení:

$$u(x, y) = \sin y \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{2\pi}} \cdot e^x + \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \cdot e^{-x} \right).$$

Cvičení PDE 8.

Metody řešení eliptických rovnic.

0. Jako rozcvičku bez znalostí metod řešení eliptických rovnic naleznete nějaké řešení rovnice (kanonický tvar z příkladu 4.1.c)

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y} \right).$$

Využijte symetrii v rovnici a hledejte řešení ve vhodném tvaru.

Řešení: Např. $u(x, y) = \text{konst}$, $u(x, y) = C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{y} + C_3$ (hledáme ve tvaru $u = F(x) + G(y)$), $u(x, y) = C\sqrt{xy} + D$ (hledáme ve tvaru $u = F(xy)$), $u(x, y) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}} + D$ (hledáme ve tvaru $u = F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$).

1. Převedte Laplaceovu rovnici $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ do polárních souřadnic.

Řešení:

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

2. Ověřte, že funkce

$$u(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi, \quad v(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi$$

jsou řešením předchozí rovnice a vyjádřete je v kartézských souřadnicích pro $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Řešení: $1, 0, x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, \dots$

2. Převedte Laplaceovu rovnici $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ do kulových souřadnic.

Řešení:

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2 \tan \theta}u_\theta = 0.$$

3. Uvažujme zobrazení

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

dané vztahy

$$\tilde{x} = \frac{xa^2}{x^2 + y^2}, \quad \tilde{y} = \frac{ya^2}{x^2 + y^2}.$$

Toto zobrazení se nazývá *Kruhová inverze*. Ukažte, že je bijekcí a zobrazuje množinu $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} | 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$ na množinu $K = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} | \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \geq a^2\}$ a naopak. Najděte předpis pro inverzní zobrazení, určete samozružené body a vyjádřete zobrazení v polárních souřadnicích.

Řešení: $(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = (\frac{a^2}{r}, \varphi)$.

4. Pomocí předchozího zobrazení ukažte, že funkce $u(r, \varphi)$ je harmonická na množině M právě tehdy, když funkce $u(\frac{a^2}{r}, \varphi)$ je harmonická na množině K . (*Harmonickou funkcí* nazýváme řešení Laplaceovy rovnice.)

5. Určete kruhové inverze harmonických funkcí z příkladu 2, pro $k = 0, 1, \dots$ je vyjádřete v kartézských souřadnicích a ověřte, že jsou harmonické (tj. řešením rovnice $\Delta u = 0$).

Řešení: $1, 0, \frac{1}{r} \cos \varphi = \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{1}{r} \sin \varphi = \frac{y}{x^2+y^2}, \dots, \frac{1}{r^k} \cos^k \varphi, \frac{1}{r^k} \sin^k \varphi$.

6. Ukažte, že Laplaceova rovnice je invariální vůči rotaci v \mathbf{R}^2 , resp. ukažte, že Laplaceova rovnice je invariální vůči ortogonální transformaci \mathbf{R}^n .

Návod: Položte $v(x, y) = u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ a ukažte, že $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = u_{\tilde{x}\tilde{x}} + u_{\tilde{y}\tilde{y}} = \Delta u$. V n -rozměrném případě položte $v(\mathbf{x}) = u(\tilde{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x} \cdot A)$, kde $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$, $A = (a_j^i)$ a využijte vlastnosti ortogonálních matic $A^{-1} = A^T$.

7. Hledejte řešení Laplaceovy rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve tvaru $u = u(r) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$. Sestavte odpovídající obyčejnou diferenciální rovnici a nalezněte řešení.

Řešení: $u(x, y) = C \ln \sqrt{x^2 + y^2} + D$.

8. Hledejte řešení Laplaceovy rovnice $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ve tvaru $u = u(r) = u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Sestavte odpovídající obyčejnou diferenciální rovnici a nalezněte řešení.

Řešení: $u(x, y, z) = C \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + D$.

9. Nalezněte ohraničené řešení rovnice

$$\Delta u = 0, \quad \text{pro } x^2 + y^2 < R^2, \quad \text{a } u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = \sin^4 \varphi.$$

Návod: Převedte rovnici do polárních souřadnic a hledejte řešení ve tvaru

$$u(r, \varphi) = X(r) \cdot \Phi(\varphi), \quad u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi), \quad u(R, \varphi) = \sin^4 \varphi, \quad u(0, \varphi) = C.$$

Řešení:

$$u(x, y) = \frac{3}{8} - \frac{x^2 - y^2}{2R^2} + \frac{x^4 + y^4 - 6x^2y^2}{8R^4}.$$

10. Nalezněte ohraničené řešení rovnice

$$\Delta u = 0, \quad \text{pro } x^2 + y^2 > R^2, \quad \text{a } u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = \cos^2 \varphi.$$

Návod: Převedte rovnici do polárních souřadnic a hledejte řešení ve tvaru

$$u(r, \varphi) = X(r) \cdot \Phi(\varphi), \quad u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi), \quad u(R, \varphi) = \cos^2 \varphi.$$

Řešení:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)} R^2.$$

11. Nalezněte řešení Poissonovy rovnice

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = K, \quad \text{pro } x^2 + y^2 < R^2,$$

$$u(x, y) = 0, \quad \text{pro } x^2 + y^2 = R^2.$$

Řešení: $u(x, y) = \frac{K}{4} (x^2 + y^2 - R^2)$.

12. Nalezněte řešení Poissonovy rovnice

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = K, \quad \text{pro } x^2 + y^2 + z^2 < R^2,$$

$$u(x, y, z) = 0, \quad \text{pro } x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Řešení: $u(x, y, z) = \frac{K}{6} (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$.

13. Příklady v textu k přednáškám na straně 81.

Cvičení PDE 9.

Okrajová úloha pro obyčejné diferenciální rovnice. Greenovy funkce.

Cvičení PDE 10:

Příprava na zkouškovou písemku.

1. Rovnice prvního řádu (lineární nehomogenní nebo quasilineární) obecně i s okrajovou podmínkou.
 2. Obecná rovnice prvního řádu s okrajovou podmínkou.
 3. Klasifikace rovnice druhého řádu a převod na kanonický tvar.
 4. Nehomogenní hyperbolická rovnice bez okrajové, s jednou nebo se dvěma okrajovými podmínkami.
 5. Rovnice řešená metodou separace proměnných (asi eliptická).
-

Ke zkoušce přinést samostatně vypracované řešení jedné úlohy ze cvičení ke kapitole 2 (na straně asi 34) učebního textu doc. Pospíšila k přednáškám (parabolická rovnice) a samostatně vypracované řešení jedné úlohy ze cvičení ke kapitole 4 (na straně asi 81) učebního textu doc. Pospíšila k přednáškám (eliptická rovnice).