Lineární programování – jaro 2012 – 2. termín

1. (15 bodů) Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je injektivní lineární zobrazení definované předpisem $\varphi(x) = A \cdot x$. Nechť dále $v_1, \dots, v_k$ jsou vektory v $\mathbb{R}^m$. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby existoval vektor $x \in \mathbb{R}^n$ takový, že $x \geq (1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$ a vektor $\varphi(x)$ svírá neostrý úhel se všemi vektory konvexního kužele generovaného vektory $v_1, \dots, v_k$.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici B a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{ f \mid Bz + a \leq 0 \}$$

je duální k úloze

$$\max \{ x_1 + \cdots + x_m \mid x_1 \leq y \cdot d_1,\ \dots,\ x_m \leq y \cdot d_m,\ Ax = b,\ y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \},$$

kde $x = (x_1, \dots, x_m)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, d_1, …, d_m konstantní vektory a A matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Definujte stěny polyedru. Charakterizujte polyedry, které nemají žádné maximální stěny. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Dejte příklad polyedru, jehož každá maximální stěna obsahuje právě tři minimální stěny.

4. (30 bodů) Řešte primární simplexovou metodou úlohu minimalizovat

$$10x - y + 15z$$

při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 2x - y + 4z &\geq 6, \\ 3x - 2y + z &\geq 7. \end{aligned}$$

Po jejím vyřešení přidejte další dvě omezení

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 5, \\ x - y + 7z &\leq 4 \end{aligned}$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.