

# Numerické metody

Jiří Zelinka

Jaro 2017

- Horová I., Zelinka J.: Numrické metody, 2. rozšířené vydání, MU, 2004
- Ralston A.: Základy numerické matematiky, Academia, 1978
- Vitásek E.: Numerické metody, SNTL, 1987
- Mathews, J.H., Fink, K.D.: Numerical methods using MATLAB, Pearson Prentice Hall, 2003
- Stoer, J., Bulirsch R.: Introduction to Numerical Analysis Springer, 1992

## Osnova

- Řešení nelineárních rovnic
- Polynomy
- Řešení soustav lineárních rovnic – přímé metody
- Řešení soustav lineárních rovnic – iterační metody
- Řešení soustav nelineárních rovnic

## Předpoklady

- Lineární algebra
- Diferenciální počet v  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^n$ )
- Integrální počet v  $\mathbb{R}$

$x$ : přesná hodnota,  $\tilde{x}$ : aproximace  $x$

$\tilde{x} - x$ : *absolutní chyba*  $\tilde{x}$   $|\tilde{x} - x| \leq \alpha$ : *odhad absolutní chyby*

$\frac{x-\tilde{x}}{x}$ : *relativní chyba*  $|\frac{x-\tilde{x}}{x}| \leq \delta$ : *odhad relativní chyby*

Řekneme, že aproximace  $\tilde{x}$  čísla  $x$  má  $s$  platných cifer, jestliže  $s$  je největší celé nezáporné číslo takové, že platí

$$\left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| \leq 5 \cdot 10^{-s}.$$

Nechť  $x$  je reálné číslo, které má obecně nekonečné dekadické vyjádření. Číslo  $x^{(d)}$ , které má  $d$  desetinných míst, je správně zaokrouhlenou hodnotou čísla  $x$ , platí-li

$$|x - x^{(d)}| \leq \frac{1}{2} 10^{-d}.$$

Ve správně zaokrouhleném čísle jsou všechny cifry platné.

Řekneme, že korektní úloha je *dobře podmíněna*, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení. Je-li  $y + \Delta y$  resp.  $y$  řešení odpovídající vstupním datům  $x + \Delta x$  resp.  $x$ , potom číslo

$$C_p = \frac{\left| \frac{\Delta y}{y} \right|}{\left| \frac{\Delta x}{x} \right|} = \frac{|\text{relativní chyba na výstupu}|}{|\text{relativní chyba na vstupu}|}$$

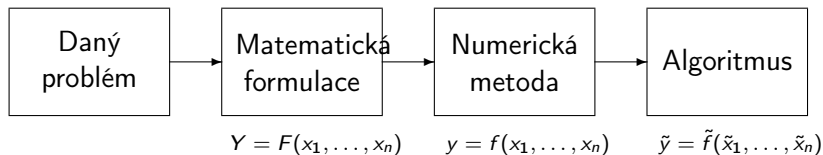
nazýváme *číslem podmíněnosti* úlohy. Je-li  $C_p \approx 1$ , je úloha velmi dobře podmíněna. Pro velká  $C_p$  ( $> 100$ ) je úloha špatně podmíněna.

Typické špatně podmíněné úlohy:

- dělení malým číslem
- odečítání dvou přibližně stejných čísel
- zvětšování chyby v iteračním výpočtu

$$A_n = n \cdot A_{n-1}$$

# Celková chyba výpočtu



- $Y - y$ : *chyba metody*
- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ : *chyba primární*
- $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ : *chyba sekundární*

Odhad primární chyby:

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| \leq \sum_{i=1}^n A_i \alpha_i,$$

kde

$$A_i = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right|, \quad i = 1, \dots, n.$$

# Symbolika $O$ , $o$

$f$  – funkce definovaná v okolí bodu  $a$  (může být i  $a = \pm\infty$ )

$g$  – funkce nenulová v prstencovém okolí bodu  $a$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ pro } x \rightarrow a \quad \limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty.$$

Význam: funkce  $f$  se v okolí bodu  $a$  chová „podobně“ jako funkce  $g$ .

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pro } x \rightarrow a \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Význam: funkce  $f$  konverguje v bodě  $a$  k nule „rychleji“ než funkce  $g$ .



Podobně

$$a_n = O(b_n) \text{ nebo } a_n = o(b_n) \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

kde  $a_n, b_n$  jsou prvky posloupností.

Dodatek „pro  $x \rightarrow a$ “ se často vynechává, pokud je jasné, o které  $a$  se jedná. Např.  $a_n = O(1/n)$ ,  $f(h) = o(h^3)$ .

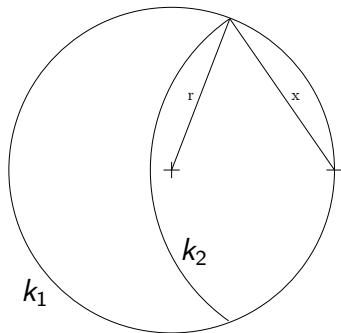
Příklad: Taylorův rozvoj

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + O(h^2), \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

# Motivační příklad

Pro kružnici  $k_1$  o poloměru  $r$  sestrojte kružnici  $k_2$  se středem na kružnici  $k_1$  tak, aby oblast ohraničená oběma kružnicemi měla poloviční obsah než vnitřek kružnice  $k_1$ .



# Úloha ze starého Egypta

*Stojíš před stěnou, za kterou je studna Lotosu jako kruh Slunce. Vedle studny je položen jeden kámen, jedno dláto a dva stvoly třtiny. Jeden stvol je dlouhý tři míry, druhý je dlouhý dvě míry. Stvoly (opřené ve stabilní poloze v diametrálně protilehlých bodech na okraji dna) se kříží na povrchu vody ve studni Lotosu a ten povrch je jednu míru nade dnem. Kdo určí velikost nejdelší délky, kterou lze umístit do dna studny Lotosu, ten si vezme oba stvoly a bude knězem boha Ra.*

Řešíme rovnici  $f(x) = 0$  na **uzavřeném** intervalu  $I = [a, b]$ ,  
pro reálnou **spojitou** funkci  $f$ ,  $\xi$  – řešení rovnice,

*Iterační proces:* vytváříme posloupnost  $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ ,  $x_k \rightarrow \xi$ .  
 $(x_k)_{k=0}^{\infty}$  – iterační posloupnost.

## Metoda půlení intervalu – bisekce

$f(a) \cdot f(b) \leq 0$ ,  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , položíme  $x_0 = (a_0 + b_0)/2$ .

Pokud  $f(a_0) \cdot f(x_0) \leq 0$  volíme

$a_1 = a_0$ ,  $b_1 = x_0$ , jinak

$a_1 = x_0$ ,  $b_1 = b_0$ ,

tedy  $\xi \in [a_1, b_1]$ .

Obecně: známe  $a_k, b_k, f(a_k) \cdot f(b_k) \leq 0$ , tedy  $\xi \in [a_k, b_k]$ ,  
položíme  $x_k = (a_k + b_k)/2$ .

Pokud  $f(a_k) \cdot f(x_k) \leq 0$  volíme

$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$ , jinak

$a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$ ,

tedy  $\xi \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ .

Odhad absolutní chyby v  $k$ -tém kroku:

$$|x_k - \xi| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

Algoritmus končí, pokud je absolutní chyba dostatečně malá.

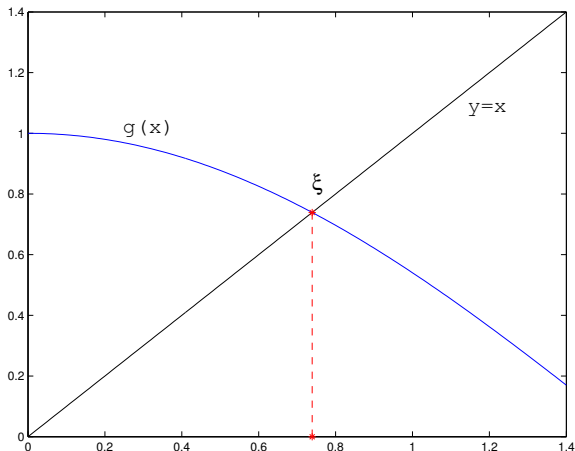
- Tato metoda se používá pro rovnici  $x = g(x)$
- Funkce  $g$  je spojitá na  $I = [a, b]$
- Řešení  $\xi$  této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce  $g$

## Iterační proces

- Zvolíme  $x_0 \in I$  a položíme  $x_1 = g(x_0)$
- Obecně  $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce  $g$  se nazývá **iterační funkce**

# Geometrická interpretace

Pevný bod  $\xi$  je průsečík grafu funkce  $g$  a přímky  $y = x$ .



# Existence pevného bodu

**Věta:** Jestliže spojitá funkce  $g$  zobrazuje interval  $I$  do sebe, tj. pro každé  $x \in I$  platí  $g(x) \in I$ , pak na intervalu  $I$  existuje alespoň jeden pevný bod  $\xi$  funkce  $g$ .

## Jednoznačnost pevného bodu

**Definice** Funkce  $g$  zobrazující interval  $I$  do sebe se nazývá kontrakce na  $I$ , jestliže existuje taková konstanta  $L$  (Lipschitzova konstanta),  $0 \leq L < 1$ , že pro každé  $x, y \in I$  platí

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

## Banachova věta o pevném bodě

Jestliže  $g$  je kontrakce na  $I$ , pak  $g$  má na tomto intervalu jediný pevný bod a iterační posloupnost definovaná vztahem  $x_{k+1} = g(x_k)$  konverguje k pevnému bodu funkce  $g$  pro libovolné  $x_0 \in I$ .



**Věta:** Necht'  $g$  je kontrakce s Lipschitzovou konstantou  $L$  na  $I$  a  $x_0 \in I$  je libovolné. Pak pro iterační posloupnost definovanou vztahem  $x_{k+1} = g(x_k)$  platí odhad

$$|x_k - \xi| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_0 - x_1|$$

# Určení konstanty $L$ pomocí derivace

Lagrangeova věta o střední hodnotě:

$$g(x) - g(y) = g'(\mu) \cdot (x - y)$$

Bod  $\mu$  leží mezi  $x$  a  $y$ .

Pokud pro každé  $x \in I$  platí  $|g'(x)| \leq L < 1$  a  $g$  zobrazuje  $I$  do sebe, je  $g$  kontrakce na  $I$ .

$$L = \max_{x \in I} |g'(x)|$$