

Numerické metody

7. přednáška, 4. dubna 2017

Jiří Zelinka

Polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0.$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ kořeny (reálné i komplexní) polynomu P .

- dělení polynomů se zbytkem
- Hornerovo schema
- zobecněné Hornerovo schema
- hranice kořenů
- počet reálných kořenů polynomu na intervalu – Sturmova věta

Věta

Nechť

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0,$$

$$A = \max(|a_{n-1}|, \dots, |a_0|),$$

$$B = \max(|a_n|, \dots, |a_1|),$$

kde $a_0 a_n \neq 0$. Pak pro všechny kořeny $\xi_k, k = 0, 1, \dots, n$, polynomu P platí

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Další kritéria

$$1. |\xi_k| \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right| \right\}$$

$$2. |\xi_k| \leq 2 \max \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \sqrt{\left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|}, \sqrt[3]{\left| \frac{a_{n-3}}{a_n} \right|}, \dots, \sqrt[n]{\left| \frac{a_0}{a_n} \right|} \right\}$$

$$3. |\xi_k| \leq \max \left\{ \left| \frac{a_0}{a_n} \right|, 1 + \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \dots, 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right\}.$$

Sturmova posloupnost

$$P_0(x) = P(x), \quad P_1(x) = -P'_0(x)$$

a sestrojme další polynomy P_{i+1} rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i :

$$P_{i-1}(x) = Q_i(x)P_i(x) - c_iP_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

kde

$$\text{st } P_i > \text{st } P_{i+1}$$

a konstanty c_i jsou kladné, ale jinak libovolné. Lze říci, že P_{i+1} je záporně vzatý zbytek při dělení $P_{i-1} : P_i$.

Protože stupně polynomů klesají, musí algoritmus končit po $m \leq n$ krocích.

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \dots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Konec opakování

Problém – volba počáteční aproximace

Věta

Nechť $P \in \Pi_n$ je polynom stupně $n \geq 2$. Nechť všechny kořeny ξ_i ,

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n,$$

jsou reálné. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou je konvergentní klesající posloupnost pro každou počáteční aproximaci $x_0 > \xi_1$ a platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi_1$.

Příklad

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) \\ &= x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720\end{aligned}$$

$$|\xi_i| < 1765$$

$$x_0 = 1765$$

$$x_1 \doteq 1\,226.8$$

$$x_2 \doteq 1\,022.9$$

$$x_3 \doteq 859.99$$

$$x_4 \doteq 711.41$$

$$\vdots$$

$$x_{10} \doteq 287.99$$

$$\vdots$$

$$x_{20} \doteq 49.48$$

Zdvojená Newtonova metoda

Pro velké x_k :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k)^n + \dots}{n(x^k)^{n-1} + \dots} \approx x^k \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

Věta

Nechť $P \in \Pi_n$, $n \geq 2$, a necht' všechny kořeny ξ_i , $i = 1, \dots, n$ polynomu P jsou reálné a $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n$. Necht' α_1 je největší kořen P' :

$$\xi_1 \geq \alpha_1 \geq \xi_2.$$

Pro $n = 2$ předpokládejme $\xi_1 > \xi_2$. Pak pro každé $z > \xi_1$ jsou čísla

$$z' = z - \frac{P(z)}{P'(z)}, \quad y = z - 2\frac{P(z)}{P'(z)}, \quad y' = y - \frac{P(y)}{P'(y)}$$

definována a platí

$$\alpha_1 < y, \quad \xi_1 \leq y' \leq z'.$$

Algoritmus

Začneme s počáteční aproximací $x_0 > \xi_1$ a zdvojenou metodou:

$$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Mohou nastat dva případy:

- ① $P(x_0)P(x_k) > 0$ pro všechna k . Pak

$$x_0 > x_1 > \dots > x_k > \dots \geq \xi_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi_1$$

- ② Existuje x_k tak, že $P(x_k)P(x_0) < 0$, $P(x_{k-1})P(x_0) > 0$.
V tomto případě tedy došlo k „přestřelení“ bodu ξ_1 a platí

$$x_0 > x_1 > \dots > x_{k-1} > \xi_1 > x_k > \alpha_1 > \xi_2.$$

Položme $y_0 = x_k$ a pokračujme dále klasickou Newtonovou metodou s touto počáteční aproximací:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{P(y_k)}{P'(y_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Snižování stupně

$P_1(x) = \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_1}$ – numerické nepřesnosti v koeficientech.

Příklad

P – polynom s kořeny $\xi_1 = 10, \dots, \xi_{10} = 1$

Aproximace kořenů:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_1 &\doteq 10.000000040624446 \\ \tilde{\xi}_2 &\doteq 8.999999654991576 \\ \tilde{\xi}_3 &\doteq 8.000001300611824 \\ &\vdots \\ \tilde{\xi}_7 &\doteq 4.000018865503898 \\ &\vdots \\ \tilde{\xi}_{10} &\doteq 0.99999962963847448\end{aligned}$$

Maehlyova metoda

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_1}, \quad P_1'(x) = \frac{P'(x)}{x - \tilde{\xi}_1} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1)^2},$$

Dosazením tohoto vyjádření do vzorce pro Newtonovu metodu pro polynom P_1 dostaneme:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{P_1(x^k)}{P_1'(x^k)} = x^k - \frac{P(x^k)}{P'(x^k) - \frac{P(x^k)}{x^k - \tilde{\xi}_1}}$$

Obecně, jestliže jsme již našli aproximace kořenů $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_j$, postupujeme obdobně a sestrojíme polynom

$$P_j(x) = \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)},$$

$$P'_j(x) = \frac{P'(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)} \sum_{i=1}^j \frac{1}{x - \tilde{\xi}_i}$$

Newtonova metoda pro nalezení kořene ξ_{j+1} je tvaru

$$x^{k+1} = \Phi_j(x^k), \quad \Phi_j(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x) - \sum_{i=1}^j \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_i}}.$$

Vektory – prvky \mathbb{R}^n nebo \mathbb{C}^n , sloupcové.

Normy vektorů

Vektorová norma na \mathbb{C}^n je funkce $\| \cdot \|$ (z \mathbb{C}^n do \mathbb{R}) s následujícími vlastnostmi:

- 1 $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
- 2 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o}, \quad \mathbf{o} = (0, \dots, 0)^T$
- 3 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
- 4 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$

Příklady vektorových norem:

$$\textcircled{1} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{eukleidovská norma})$$

$$\textcircled{2} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{oktaedrická norma})$$

$$\textcircled{3} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{krychlová norma})$$

$$\textcircled{4} \quad \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \text{ norma})$$

Každá vektorová norma indukuje metriku danou vztahem

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Konvergence v normě: $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0.$

Matice

Nechť A je čtvercová matice řádu n s reálnými resp. komplexními prvky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

\mathcal{M}_n : třída všech matic tohoto typu.

Matici A lze považovat za vektor dimenze n^2 . Mohli bychom tedy definovat normu matice jako normu vektoru. Ale potřebujeme i další vlastnosti:

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$A \cdot x = \lambda x$$

x – vlastní vektor matice A , λ – příslušné vlastní číslo

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu

$\psi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A)$, E – jednotková matice

Spektrální poloměr matice: $\rho(A) = \max\{|\lambda_k|; \lambda_k \text{ je vlastní číslo matice } A\}$

Stopa matice: $tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$

Normy matic

Maticová norma na množině \mathcal{M}_n je reálná funkce $\| \cdot \|$ s těmito vlastnostmi:

- 1 $\|A\| \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
- 2 $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$ je nulová matice
- 3 $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
- 4 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$
- 5 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$

Vlastnost 5) se nazývá **multiplikativnost**.

Souhlasnost maticové a vektorové normy

Řekneme, že maticová norma $\| \cdot \|$ je *souhlasná* s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_\varphi$, jestliže

$$\|Ax\|_\varphi \leq \|A\| \|x\|_\varphi, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

Přidružená norma

Nechť $\| \cdot \|_\varphi$ je vektorová norma na \mathbb{C}^n . Pak číslo

$$\|A\|_\varphi = \max_{\|x\|_\varphi=1} \|Ax\|_\varphi$$

je maticová norma souhlasná s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_\varphi$.

Pro jednotkovou matici E platí

$$\|E\|_\varphi = \max_{\|x\|_\varphi=1} \|Ex\|_\varphi = 1$$

a pro souhlasnou maticovou normu platí $\|E\| \geq 1$.

Věta

Přidružená maticová norma je nejvýše rovna libovolné maticové normě souhlasné s danou vektorovou normou.

Věta

Nechť maticová norma $\| \cdot \|$ je souhlasná s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_{\varphi}$. Pak pro všechna vlastní čísla λ matice A platí:

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Přidružené maticové normy

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$. Přidružené maticové normy k vektorovým normám $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_2$ jsou dány vztahy

$$\textcircled{1} \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\textcircled{2} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\textcircled{3} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}, \quad \rho(A^*A) \text{ je spektrální poloměr } A^*A, \\ \text{kde } A^* = \overline{A}^T, \text{ pro reálné matice je } A^* = A^T.$$

$\|A\|_2$ – spektrální norma matice

Frobeniova norma

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^*A)$
- $\|E\|_F = \sqrt{n}$.
- $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$
- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$
- $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$.

Věta

Nechť $\|B\| < 1$, $\|\cdot\|$ je souhlasná s danou vektorovou normou. Pak matice $E - B$ je regulární a platí

$$\|(E - B)^{-1}\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}.$$