

Numerické metody

8. přednáška, 11. dubna 2017

Jiří Zelinka

Normy matic

Souhlasnost maticové a vektorové normy

Řekneme, že maticová norma $\| \cdot \|$ je *souhlasná* s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_\varphi$, jestliže

$$\|Ax\|_\varphi \leq \|A\| \|x\|_\varphi, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

Přidružená norma

Nechť $\| \cdot \|_\varphi$ je vektorová norma na \mathbb{C}^n . Pak číslo

$$\|A\|_\varphi = \max_{\|x\|_\varphi=1} \|Ax\|_\varphi$$

je maticová norma souhlasná s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_\varphi$.

Věta

Přidružená maticová norma je nejvýše rovna libovolné maticové normě souhlasné s danou vektorovou normou.

Věta

Nechť maticová norma $\| \cdot \|$ je souhlasná s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_{\varphi}$. Pak pro všechna vlastní čísla λ matice A platí:

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Věta

Nechť $\|B\| < 1$, $\|\cdot\|$ je souhlasná s danou vektorovou normou. Pak matice $E - B$ je regulární a platí

$$\|(E - B)^{-1}\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}.$$

Konec opakování

Systém

$$Ax = b$$

převédeme na

$$x = Tx + g$$

x^* – řešení

$x^* = (E - T)^{-1}g$ za předpokladu, že $E - T$ je regulární.

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ – libovolná počáteční aproximace. Posloupnost $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ určená rekurentně vztahem

$$x^{k+1} = Tx^k + g, \quad k = 0, 1, \dots$$

se nazývá **iterační posloupnost** a matice T se nazývá **iterační matice**

Problémy:

- 1 Jak zvolit iterační matici T , tj. jakým způsobem převést systém $Ax = b$ na systém $x = Tx + g$?
- 2 Za jakých předpokladů posloupnost $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci k přesnému řešení x^* ?

$$x^1 = Tx^0 + g,$$

$$x^2 = Tx^1 + g = T(Tx^0 + g) + g = T^2x^0 + (T + E)g,$$

$$x^3 = Tx^2 + g = T^3x^0 + (T^2 + T + E)g,$$

\vdots

$$x^{k+1} = T^{k+1}x^0 + (T^k + T^{k-1} + \dots + E)g.$$

Definice

Řekneme, že matice H je **konvergentní**, jestliže

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = O,$$

kde O je nulová matice, konvergence je bodová.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- 1 H je konvergentní matice.
- 2 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|H^k\| = 0$ pro nějakou přidruženou maticovou normu.
- 3 $\rho(H) < 1$ ($\rho(H)$ je spektrální poloměr H).
- 4 $\lim_{k \rightarrow \infty} H^k \mathbf{x} = \mathbf{o}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lemma

Nechť $\rho(T) < 1$. Pak $E - T$ je regulární a platí

$$(E - T)^{-1} = E + T + T^2 + \dots$$

Hlavní věta o konvergenci iteračního procesu

Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ určená iteračním procesem $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{g}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T) < 1$, přičemž

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{x}^* = T\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$$

Důsledek

Nechť pro nějakou přidruženou maticovou normu platí $\|T\| < 1$. Pak posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná iteračním procesem $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{g}$ konverguje k řešení $\mathbf{x}^* = (E - T)^{-1}\mathbf{g}$ pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Dále platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\| &\leq \|T\|^k \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\|, \\ \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\| &\leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|. \end{aligned}$$

Kriteria pro zastavení výpočtu

1 $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| / \|\mathbf{x}^k\| < \varepsilon$

2 $\|\mathbf{r}^{k+1}\| \leq \varepsilon(\|A\| \|\mathbf{x}^{k+1}\| + \|\mathbf{b}\|)$, kde $\mathbf{r}^{k+1} = A\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{b}$

maticová norma je přidružená dané vektorové normě, $\varepsilon > 0$ je požadovaná přesnost.

Jacobiova iterační metoda

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matici A zapišme ve tvaru

$$A = D - L - U,$$

kde

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

D je diagonální matice, L je dolní trojúhelníková matice s nulami na diagonále a U je horní trojúhelníková matice s nulami na diagonále.

$$Ax = (D - L - U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b.$$

Pokud $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, je matice D regulární a z předchozí rovnice lze vypočítat

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b.$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix},$$

Maticový tvar Jacobiovy iterační metody

Jacobiova iterační matice: $T_J = D^{-1}(L + U)$

$$\mathbf{x}^{k+1} = T_J \mathbf{x}^k + D^{-1} \mathbf{b},$$

$T_J = (t_{ij})$, $t_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ pro $i \neq j$, $t_{ii} = 0$ pro $i = 1, \dots, n$.

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Realizace výpočtu:

Z první rovnice vypočteme x_1 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - \dots - a_{1n}x_n^k),$$

z druhé rovnice vypočteme x_2 :

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k),$$

obecně z i -té rovnice vypočteme x_i :

$$x_i^{k+1} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

až z n -té rovnice vypočteme x_n , a na pravé straně takto získaného systému jsou prvky matice T_J .

Věta o konvergenci Jacobiovy iterační metody:

Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná metodou $\mathbf{x}^{k+1} = T_J \mathbf{x}^k + D^{-1} \mathbf{b}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T_J) < 1$.

Odhad chyby:

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\|_{\infty} \leq \frac{\|T_J\|_{\infty}^k}{1 - \|T_J\|_{\infty}} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_{\infty}.$$

Příklad

Geometrický význam

Silné řádkové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}|, \quad k = 1, \dots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Gaussova-Seidelova iterační metoda

Z první rovnice vypočteme x_1 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - \dots - a_{1n}x_n^k),$$

z druhé rovnice vypočteme x_2 , pro x_1 použijme novou iteraci:

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k),$$

ze třetí rovnice vypočteme x_3 , pro x_1 a x_2 použijme novou iteraci:

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^k \dots - a_{3n}x_n^k),$$

Obecně

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Maticový zápis:

$$\begin{aligned} Ax = \mathbf{b} &\Rightarrow (D - L - U)x = \mathbf{b} \\ &(D - L)x = Ux + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

$a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n,$ \Rightarrow matice $D - L$ je regulární a

$$\mathbf{x} = (D - L)^{-1} U\mathbf{x} + (D - L)^{-1} \mathbf{b}.$$

Položme $T_G = (D - L)^{-1} U$, Gaussova-Seidelova iterační metoda je tvaru

$$\mathbf{x}^{k+1} = T_G \mathbf{x}^k + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = (D - L)^{-1} \mathbf{b}.$$

Věta

Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Gaussovou-Seidelovou iterační metodou $\mathbf{x}^{k+1} = (D - L)^{-1}U\mathbf{x}^k + (D - L)^{-1}\mathbf{b}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T_G) < 1$.

Silné řádkové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}|, \quad k = 1, \dots, n.$$

Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Příklad

Geometrický význam

Věta (Stein-Rosenberg)

Nechť pro prvky matice A platí $a_{ij} \leq 0$ pro všechna $i \neq j$ a $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$. Pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

- $0 < \rho(T_G) < \rho(T_J) < 1$
- $1 < \rho(T_J) < \rho(T_G)$
- $\rho(T_J) = \rho(T_G) = 0$
- $\rho(T_J) = \rho(T_G) = 1$.

To znamená, že konvergují-li obě metody, Gaussova-Seidelova metoda konverguje rychleji.

Věta

Nechť A je pozitivně definitní matice. Pak Gaussova-Seidelova metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci.