

Numerické metody

12. přednáška, 9. května 2017

Jiří Zelinka

Věta

Nechť matice A je symetrická a její všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \dots, \quad \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice $T \in \mathcal{M}_n$, že $A = T^T T$.

Prvky matice $T = (t_{ij})$:

- $t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = 2, \dots, n,$

- $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}^2}, \quad i = 2, \dots, n$

- $t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}}(a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}t_{lj}), \quad j > i \quad t_{ij} = 0, \quad j < i$

Příklad

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\-x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= -8\end{aligned}$$

Rozklad třídiagonální matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$a_{i,i+1} = l_{ij}u_{i,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$ je třídiagonální matice s vlastnostmi:

$$\left. \begin{array}{l} a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ |a_{11}| > |a_{12}|, \\ |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ |a_{nn}| > |a_{n,n-1}|. \end{array} \right\} A \text{ – řádkově diagon.} \\ \text{dominantní}$$

Pak matice A je regulární a hodnoty l_{ii} , $i = 1, \dots, n$, vypočtené ze uvedených vztahů jsou různé od nuly.

Důsledek

Jsou-li splněny předpoklady věty, lze matici A rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice v uvedeném tvaru.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 2x_4 &= 1.5 \end{aligned}$$

Definice

Algoritmus pro řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se nazývá *stabilní*, jestliže vypočtené řešení $\hat{\mathbf{x}}$ je takové, že

$$(A + \mathcal{E})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b},$$

kde \mathcal{E} a $\delta\mathbf{b}$ jsou malé; \mathcal{E} se nazývá *chybová matice*.

Definice

Pro libovolnou přidruženou maticovou normu definujeme *číslo podmíněnosti* matice A vztahem

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Řekneme, že *matice A je dobře podmíněna*, jestliže $k(A) \approx 1$ a *špatně podmíněna*, jestliže $k(A)$ je podstatně větší než 1.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = 111$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 101 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\|_1 = 111$$

Tedy $k(A) = 111^2 = 12321$, A je špatně podmíněna.

Příklad – Hilbertova matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Pro $n = 10$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ je $k(A) = 3,5353 \cdot 10^{13}$.

Věta

Jestliže řešíme systém $Ax = b$ v pohyblivé řádové čárce se zaokrouhlováním na t desetinných míst a $k(A) \approx 10^\alpha$, pak vypočtené řešení \tilde{x} je správné na $(t - \alpha - 1)$ desetinných míst.

A – pozitivně definitní matice

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)} = \varrho(A)$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

a

$$\|A^{-1}\|_2 = \left(\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right)^{-1}.$$

$$k(A) = \frac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i}.$$