Páté cvičení – afinity, rozklad afinit na základní afinity, homotetie

Úloha 1. *Určete samodružné body a směry afinních zobrazení* f, g, h *z* $\mathcal{A}_3$ *do* $\mathcal{A}_3$ *zadaných rovnicemi vzhledem ke standardní bázi. Nalezněte repér, ve které bude mít rovnice „co možná nejjednodušší“ tvar a rovnici ztransformujte.*

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. *Rozložte afinitu* f *na co možná nejmenší počet základních afinit.*

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Úloha 3. *Napište analytické vyjádření translace* t *prostoru* $\mathcal{A}_3$ *o vektor* $(-1,-2,3)$ *a stejnolehlosti* s *téhož prostoru se středem* $[1,1,1]$ *a koeficientem* -2*.*

Úloha 4. *Napište rovnice stejnolehlosti v* $\mathcal{A}_3$ *s koeficientem* 3*, která zobrazí bod* $A[2,0,3]$ *do bodu* $A'[0,-1,-3]$*, a najděte její střed.*

Úloha 5. *V* $\mathcal{A}_3$ *je dána stejnolehlost* s *se středem* $[1,2,1]$ *a koeficientem* -3 *a posunutí* t *o vektor* $(-1,1,1)$*. Nalezněte rovnice zobrazení* s, t, s^{-1}, t^{-1}, $s\circ t$, $t\circ s$ *a* $s^{-1}\circ t\circ s$*. Určete, o jaký druh homotetie se v jednotlivých případech jedná, a určete její prvky.*

Řešení

1. $f:\ \varrho_X : x+y=0$

   $\lambda^3+2\lambda^2-7\lambda+4$

   $\lambda_{1,2}=1, \mathbf{u}_1=(-1,1,0), \mathbf{u}_2=(0,0,1)$

   $\lambda_3=-4, \mathbf{u}_3=(-2,-3,2)$

   Repér tvoří lib. bod z ϱ_X (např. $[0,0,0]$) a vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$.

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   $g:\ \varrho_X : 2x+y-z+2=0$

   $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$

   $\lambda_{1,2}=1, \mathbf{u}_1=(1,-2,0), \mathbf{u}_2=(0,1,1)$

   $\lambda_3=2, \mathbf{u}_3=(1,0,1)$

   Repér tvoří lib. bod z ϱ_X (např. $[0,-2,0]$) a vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$.

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   $h:\ X=[12,3,5]$

   $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda$

   $\lambda_1=0, \mathbf{u}_1=(-3,-1,1)$

   $\lambda_{2,3}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \mathbf{w}_{1,2}=\mathbf{v}_1\pm \mathrm{i}\mathbf{v}_2=(3,2,1)\pm \mathrm{i}(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$

   Repér tvoří bod X a vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$.

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Množina samodružných bodů je přímka $p: X=[0,-\frac{1}{2},0]+t(1,1,1)$, tedy se dá f rozložit na dvě záladní afinity.

3. $t: x'=x-1, y'=y-2, z'=z+3;$

   $s: x'=-2x+3, y'=-2y+3, z'=-2z+3$

4. $s: x'=3x-6, y'=3y-1, z'=3z-12;\ S[3,\frac{1}{2},6]$

5. $t: x'=x-1, y'=y+1, z'=z+1;$

   $s: x'=-3x+4, y'=-3y+8, z'=-3z+4;$

   $s^{-1}: x'=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}, y'=-\frac{1}{3}y+\frac{8}{3}, z'=-\frac{1}{3}z+\frac{4}{3}$; střed $[1,2,1]$;

   $t^{-1}: x'=x+1, y'=y-1, z'=z-1$; vektor $(1,-1,-1)$;

   $s\circ t: x'=-3x+7, y'=-3y+5, z'=-3z+1$; střed $[\frac{7}{4},\frac{5}{4},\frac{1}{4}]$;

   $t\circ s: x'=-3x+3, y'=-3y+9, z'=-3z+5$; střed $[\frac{3}{4},\frac{9}{4},\frac{5}{4}]$;

   $s^{-1}\circ t\circ s: x'=x+\frac{1}{3}, y'=y-\frac{1}{3}, z'=z-\frac{1}{3}$; vektor $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.