

Osmé cvičení – shodnosti

Úloha 1. Ukažte, že jsou afinní zobrazení f a g shodnostmi a určete, zda jde o přímou nebo nepřímou shodnost.

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Ukažte, že pro pevné reálné nenulové parametry a, φ je zobrazení f shodné. Rozhodněte, zda jde o přímou či nepřímou shodnost.

$$\begin{aligned} f : x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' &= z + a\varphi \end{aligned}$$

Úloha 3. Určete koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby afinní zobrazení $f : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$ bylo shodné:

$$\begin{aligned} f : x' &= x + by - 2 \\ y' &= \quad + \frac{1}{2}y + 1 \\ z' &= ax + cy - 3 \end{aligned}$$

Úloha 4. Určete parametry $p, q \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala shodnost v \mathcal{E}_2 , která zobrazí body $A[3, 0]$, $B[1, 2]$, $C[-1, -1]$ na body $A'[1, 4]$, $B'[p, 2]$ a $C'[2, q]$.

Úloha 5. Napište rovnice alespoň tří shodností v \mathcal{E}_3 , pro které je bod $O[0, 3, 1]$ samodružný a směry $(1, -1, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ samodružné. Kolik je takových shodností celkem?

Úloha 6. Napište rovnice rovinové souměrnosti v \mathcal{E}_3 podle roviny $\varrho : x + 2y - z + 4 = 0$.

Úloha 7. Napište rovnice osové souměrnosti v \mathcal{E}_3 podle osy $o : X = [2, 0, 1] + t(1, -2, 2)$.

Řešení

1. Shodnost f je nepřímá, shodnost g je přímá.

2. Shodnost f je přímá.

3. $a = 0, b = 0, c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $p = -1, q = 0$

5. •
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{28}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$