Hodnocení kontingenčních tabulek

Osnova:

- zavedení kontingenční tabulky
- testování hypotézy o nezávislosti a měření síly závislosti
- test homogenity
- analýza čtyřpolních tabulek

Motivace

Při zpracování dat se velmi často setkáme s úkolem zjistit, zda dvě náhodné veličiny nominálního typu jsou stochasticky nezávislé. Např. nás může zajímat, zda ve sledované populaci je barva očí a barva vlasů nezávislá.

Zpravidla chceme také zjistit intenzitu případné závislosti sledovaných dvou veličin. K tomuto účelu byly zkonstruovány různé koeficienty, které nabývají hodnot od 0 do 1. Čím je takový koeficient bližší 1, tím je závislost mezi danými dvěma veličinami silnější a čím je bližší 0, tím je slabší.

Kontingenční tabulky

Nechť X,Y jsou dvě nominální náhodné veličiny (tj. obsahová interpretace je možná jenom u relace rovnosti). Nechť X nabývá variant $x_{[1]}, ..., x_{[r]}$ a Y nabývá variant $y_{[1]}, ..., y_{[s]}$.

Označme:

$\pi_{jk} = P(X = x_{[j]} \wedge Y = y_{[k]})$ … simultánní pravděpodobnost dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$

$\pi_{j.} = P(X = x_{[j]})$ … marginální pravděpodobnost varianty $x_{[j]}$

$\pi_{.k} = P(Y = y_{[k]})$ … marginální pravděpodobnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní a marginální pravděpodobnosti zapíšeme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	…	$y_{[s]}$	$\pi_{j.}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		π_{11}	…	π_{1s}	$\pi_{1.}$
…		…	…	…	…
$x_{[r]}$		π_{r1}	…	π_{rs}	$\pi_{r.}$
$\pi_{.k}$		$\pi_{.1}$	…	$\pi_{.s}$	1

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	n_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
...		...	...	...	...
$x_{[r]}$		n_{r1}	...	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$		$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	n

$n_{j.} = n_{j1} + ... + n_{js}$ je marginální absolutní četnost varianty $x_{[j]}$
$n_{.k} = n_{1k} + ... + n_{rk}$ je marginální absolutní četnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní pravděpodobnost π_{jk} odhadneme pomocí simultánní relativní četnosti $p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$, marginální pravděpodobnosti $\pi_{j.}$ a $\pi_{.k}$ odhadneme pomocí marginálních relativních četností $p_{j.} = \frac{n_{j.}}{n}$ a $p_{.k} = \frac{n_{.k}}{n}$.

Testování hypotézy o nezávislosti

Testujeme nulovou hypotézu H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny proti alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

Kdyby náhodné veličiny X, Y byly stochasticky nezávislé, pak by platil multiplikativní vztah

$\forall j = 1,\dots,r,\ \forall k = 1,\dots,s: \pi_{jk} = \pi_{j.}\,\pi_{.k}$ neboli $\frac{n_{jk}}{n} = \frac{n_{j.}}{n} \cdot \frac{n_{.k}}{n}$, tj. $n_{jk} = \frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$. Číslo $\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$ se nazývá teoretická četnost dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$.

Testová statistika: $K = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.} n_{.k}}{n} \right)^2}{\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}}$.

Platí-li H_0, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)), \infty)$.

Hypotézu o nezávislosti veličin X, Y tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \geq \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$.

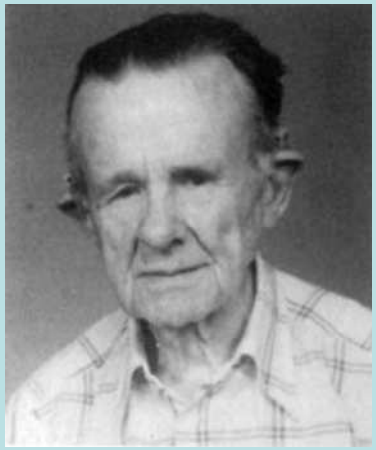
Podmínky dobré aproximace

Rozložení statistiky K lze aproximovat rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$, pokud teoretické četnosti $\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$ aspoň v 80% případů nabývají hodnoty větší nebo rovné 5 a ve zbylých 20% neklesnou pod 2. Není-li splněna podmínka dobré aproximace, doporučuje se slučování některých variant.

Měření síly závislosti

Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}$, kde m = min{r,s}. Tento koeficient nabývá hodnot mezi 0 a 1. Čím blíže je k 1, tím je závislost mezi X a Y těsnější, čím blíže je k 0, tím je tato závislost volnější.

Význam hodnot Cramérova koeficientu:
mezi 0 až 0,1 … zanedbatelná závislost,
mezi 0,1 až 0,3 … slabá závislost,
mezi 0,3 až 0,7 … střední závislost,
mezi 0,7 až 1 … silná závislost.



Carl Harald Cramér (1893 – 1985): Švédský matematik

Příklad

V sociologickém průzkumu byl z uchazečů o studium na vysokých školách pořízen náhodný výběr rozsahu 360. Mimo jiné se zjišťovala sociální skupina, ze které uchazeč pochází (veličina X) a typ školy, na kterou se hlásí (veličina Y). Výsledky jsou zaznamenány v kontingenční tabulce:

Sociální skupina	Typ školy			$n_{j.}$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_{.k}$	140	110	110	360

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny. Vypočtěte Cramérův koeficient.

Řešení:

Nejprve vypočteme všech 12 teoretických četností:

Sociální skupina	Typ školy			$n_{j.}$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_{.k}$	140	110	110	360

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n}=\frac{90\cdot 140}{360}=35,\ \frac{n_{1.}n_{.2}}{n}=\frac{90\cdot 110}{360}=27{,}5,\ \frac{n_{1.}n_{.3}}{n}=\frac{90\cdot 110}{360}=27{,}5,$$
$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n}=\frac{100\cdot 140}{360}=38{,}9,\ \frac{n_{2.}n_{.2}}{n}=\frac{100\cdot 110}{360}=30{,}6,\ \frac{n_{2.}n_{.3}}{n}=\frac{100\cdot 110}{360}=30{,}6,$$
$$\frac{n_{3.}n_{.1}}{n}=\frac{60\cdot 140}{360}=23{,}3,\ \frac{n_{3.}n_{.2}}{n}=\frac{60\cdot 110}{360}=18{,}3,\ \frac{n_{3.}n_{.3}}{n}=\frac{60\cdot 110}{360}=18{,}3,$$
$$\frac{n_{4.}n_{.1}}{n}=\frac{110\cdot 140}{360}=42{,}8,\ \frac{n_{4.}n_{.2}}{n}=\frac{110\cdot 110}{360}=33{,}6,\ \frac{n_{4.}n_{.3}}{n}=\frac{110\cdot 110}{360}=33{,}6$$

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny, všechny teoretické četnosti převyšují číslo 5.

Dosadíme do vzorce pro testovou statistiku K:

$$K=\frac{(50-35)^2}{35}+\frac{(30-27{,}5)^2}{27{,}5}+\ldots+\frac{(50-33{,}6)^2}{33{,}6}=76{,}84\,.$$

Dále stanovíme kritický obor:

$$W=\langle\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)),\infty)=\langle\chi^2_{0{,}95}((4-1)(3-1)),\infty)=\langle\chi^2_{0{,}95}(6),\infty)=\langle 12{,}6,\infty)$$

Protože $K \in W$, hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme Cramérův koeficient: $V=\sqrt{\frac{76{,}4}{360\cdot 2}}=0{,}3267\,.$

Hodnota Cramérova koeficientu svědčí o tom, že mezi veličinami X a Y existuje středně silná závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných (X - sociální skupina, Y – typ školy, četnost) a 12 případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	I	univerzitní	50
2	I	technický	30
3	I	ekonomický	10
4	II	univerzitní	30
5	II	technický	50
6	II	ekonomický	20
7	III	univerzitní	10
8	III	technický	20
9	III	ekonomický	30
10	IV	univerzitní	50
11	IV	technický	10
12	IV	ekonomický	50

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Očekávané četnosti. Dostaneme kontingenční tabulku teoretických četností:

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (typ skoly)
Četnost označených buněk > 10
Pearsonův chí-kv. : 76,8359, sv=6, p=,000000

X	Y univerzitní	Y technický	Y ekonomický	Řádk. součty
I	35,0000	27,5000	27,5000	90,0000
II	38,8889	30,5556	30,5556	100,0000
III	23,3333	18,3333	18,3333	60,0000
IV	42,7778	33,6111	33,6111	110,0000
Vš.skup.	140,0000	110,0000	110,0000	360,0000

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny. V záhlaví tabulky je uvedena hodnota testové statistiky K = 76,8359, počet stupňů volnosti 6 a odpovídající p-hodnota. Je velmi blízká 0, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny.
Hodnotu testové statistiky a Cramérův koeficient dostaneme také tak, že na na záložce Možnosti zaškrtneme Pearsonův & M-V chí kvadrát a Cramérovo V, na záložce Detailní výsledky vybereme Detailní 2 rozm. tabulky.

Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	76,83589	df=6	p=,00000
M-V chí-kvadr.	84,53528	df=6	p=,00000
Fí	,4619881		
Kontingenční koeficient	,4193947		
Cramér. V	,3266749		

Test homogenity v tabulce typu 2 x s

Máme kontingenční tabulku, v níž veličina X má jen dvě varianty a veličina Y s variant:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$\pi_{j.}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		π_{11}	...	π_{1s}	$\pi_{1.}$
$x_{[2]}$		π_{21}	...	π_{2s}	$\pi_{2.}$
$\pi_{.k}$		$\pi_{.1}$	...	$\pi_{.s}$	1

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr (X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n) rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
$x_{[2]}$		n_{21}	...	n_{2s}	$n_{2.}$
$\pi_{.k}$		$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	n

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\pi_{1k} = \pi_{2k}$, k = 1, 2, …, s proti alternativě H_1: aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší.
Na problém lze pohlížet tak, že máme s nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení, přičemž první má rozsah $n_1 = n_{11} + n_{21}$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_1)$, …. , s-tý má rozsah $n_s = n_{1s} + n_{2s}$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_s)$. Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_s$ proti alternativě H_1: non H_0.

V kapitole o hodnocení náhodných výběrů z alternativních rozložení jsme použili testovou statistiku:

$Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{s} n_j (M_j - M_*)^2 \approx \chi^2(s-1)$, když H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty)$

H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \in W$. Přitom $M_* = \frac{\sum_{j=1}^{s} n_j M_j}{n}$ je vážený průměr výběrových průměrů.

Nyní použijeme testovou statistiku $K = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.} n_{.k}}{n} \right)^2}{\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}}$, stejně jako u testu nezávislosti. Lze dokázat, že při výše uvedeném označení jsou statistiky Q a K totožné. Tedy test homogenity lze provést stejně jako test nezávislosti.
Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením χ^2(s-1). Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty)$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Příklad: 104 náhodně vybraných matek bylo dotázáno, zda jejich kojenec dostává dudlík. Zjišťoval se též nejvyšší stupeň dosaženého vzdělání matky.

Vzdělání matky	Počet matek	Počet dětí s dudlíkem
ZŠ	39	27
SŠ	47	34
VŠ	18	15

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že používání dudlíku nezávisí na vzdělání matky.
(Jedná se o příklad 8.6.2. ze skript Základní statistické metody. Zde je uvedeno, že testová statistika Q se realizuje hodnotou 1,267, kritický obor je $W = \langle 5{,}992, \infty)$, tedy nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.)

Řešení: Data zapíšeme do kontingenční tabulky 2 x 3.

	Matka ZŠ	Matka SŠ	Matka VŠ	$n_{j.}$
Dudlík ano	27	34	15	76
Dudlík ne	12	13	3	28
$n_{.k}$	39	47	18	104

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{76 \cdot 39}{104} = 28{,}5, \quad \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{76 \cdot 47}{104} = 34{,}35, \quad \frac{n_{1.}n_{.3}}{n} = \frac{76 \cdot 18}{104} = 13{,}15,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{28 \cdot 39}{104} = 10{,}5, \quad \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{28 \cdot 47}{104} = 12{,}65, \quad \frac{n_{2.}n_{.3}}{n} = \frac{28 \cdot 18}{104} = 4{,}85$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny, pouze v 1 případě ze 6 je teoretická četnost menší než 5.

$$K = \frac{(27-28{,}5)^2}{28{,}5} + \frac{(34-34{,}35)^2}{34{,}35} + \ldots + \frac{(3-4{,}85)^2}{4{,}85} = 1{,}2686$$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty) = \langle \chi^2_{0{,}95}(2), \infty) = \langle 5{,}992, \infty)$

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 se tedy neprokázalo, že používání dudlíku závisí na vzdělání matky.

Čtyřpolní tabulky

Nechť r = s = 2. Pak hovoříme o čtyřpolní kontingenční tabulce a používáme označení: $n_{11} = a$, $n_{12} = b$, $n_{21} = c$, $n_{22} = d$.

X	Y		$n_{j.}$
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	
$x_{[1]}$	a	b	a+b
$x_{[2]}$	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Test nezávislosti ve čtyřpolní tabulce

Testovou statistiku pro čtyřpolní kontingenční tabulku lze zjednodušit do tvaru:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

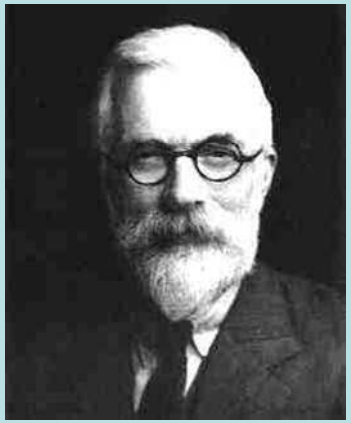
Platí-li hypotéza o nezávislosti veličin X, Y, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty)$

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Povšimněte si, že za platnosti hypotézy o nezávislosti ad = bc.

Pro čtyřpolní tabulku navrhl R. A. Fisher přesný (exaktní) test nezávislosti známý jako Fisherův faktoriálový test.



Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962): Britský statistik a genetik.
(Fisherův přesný test je popsán např. v knize K. Zvára: Biostatistika, Karolinum, Praha 1998. Princip spočívá v tom, že pomocí kombinatorických úvah se vypočítají pravděpodobnosti toho, že při daných marginálních četnostech dostaneme tabulky, které se od nulové hypotézy odchylují aspoň tak, jako daná tabulka.)

Upozornění: STATISTICA poskytuje p-hodnotu pro Fisherův přesný test. Jestliže vyjde $p \leq \alpha$, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti α.

Příklad: V náhodném výběru 50 obézních dětí ve věku 6 – 14 let byla zjišťována obezita rodičů. Veličina X – obezita matky, veličina Y – obezita otce. Výsledky průzkumu jsou uvedeny v kontingenční tabulce:

X	Y		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	15	9	24
ne	7	19	26
$n_{.k}$	22	28	50

Pomocí Fisherova exaktního testu ověřte, zda lze na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu o nezávislosti náhodných veličin X a Y.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X, Y (varianty 0 – neobézní, 1 – obézní) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	obézní	obézní	15
2	obézní	neobézní	9
3	neobézní	obézní	7
4	neobézní	neobézní	19

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

	Statist. : X(2) x Y(2) (obezita rodicu)		
Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	6,410777	df=1	p=,01134
M-V chí-kvadr.	6,548348	df=1	p=,01050
Yatesův chí-kv.	5,048207	df=1	p=,02465
Fisherův přesný, 1-str.			p=,01188
2-stranný			p=,02163
McNemarův chí-kv. (A/D)	,2647059	df=1	p=,60691
(B/C)	,0625000	df=1	p=,80259

Vidíme, že p-hodnota pro Fisherův exaktní oboustranný test je 0,02163, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že obezita matky a otce spolu nesouvisí.

Test homogenity ve čtyřpolní tabulce

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\pi_{1k} = \pi_{2k}$, k = 1, 2 proti alternativě H_1: aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší. Na problém lze pohlížet tak, že máme dva nezávislé výběry z alternativních rozložení, první má rozsah $n_1 = a+c$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_1)$, druhý má rozsah $n_2 = b+d$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_2)$. Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti oboustranné alternativě.

V kapitole o hodnocení náhodných výběrů z alternativních rozložení jsme použili testovou statistiku

$T_0 = \dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$, která se za platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením N(0,1). (M_* je vážený prů-

měr výběrových průměrů.)

Nyní použijeme testovou statistiku $K = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, stejně jako u testu nezávislosti. Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty)$. Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Příklad: Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou. 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Na asymptotické hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině je shodný.

Řešení:

Údaje uspořádáme do čtyřpolní kontingenční tabulky, kde roli veličiny X hraje onemocnění chřipkou a roli veličiny Y existence očkování.

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	20	80	100
ne	220	140	360
$n_{.k}$	240	220	460

Vypočteme sloupcově podmíněné relativní četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování	
	ano	ne
ano	8,3%	36,4%
ne	91,7%	63,6%

Vidíme, že v očkované skupině onemocnělo chřipkou 8,3% lidí, v kontrolní skupině však 36,4%. Zjistíme, zda takto velký rozdíl je způsoben pouze náhodnými vlivy.

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace, tedy nejprve vypočteme teoretické četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	20	80	100
ne	220	140	360
$n_{.k}$	240	220	460

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n}=\frac{100\cdot 240}{460}=52{,}17,\ \frac{n_{1.}n_{.2}}{n}=\frac{100\cdot 220}{460}=47{,}83,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n}=\frac{360\cdot 240}{460}=187{,}83,\ \frac{n_{2.}n_{.2}}{n}=\frac{360\cdot 220}{460}=172{,}17$$

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny.
Realizace testové statistiky:

$$K=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{460(20\cdot 140-80\cdot 220)^2}{240\cdot 220\cdot 100\cdot 360}=53{,}01.$$

Kritický obor: $W=\langle \chi^2{}_{1-\alpha}(1),\infty)=\langle \chi^2{}_{0,99}(1),\infty)=\langle 6{,}635,\infty)$.

Protože $K\in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,01. S rizikem omylu nejvýše 0,01 jsme tedy prokázali, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině se liší.

Nyní provedeme výpočet pomocí statistiky $T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$, která se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením N(0,1).

Přitom očkovaných bylo 240, z nich onemocnělo 20, neočkovaných bylo 220, z nich onemocnělo 80.

V našem případě tedy $n_1 = 240$, $n_2 = 220$, $m_1 = \frac{20}{240}, m_2 = \frac{80}{220}, m_* = \frac{20+80}{460} = \frac{5}{23}$

Ověření podmínek $n_1 \vartheta_1 (1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2, tedy

20.(1-20/240) = 18,333 > 9, 80.(1-80/220) = 50,909 > 9.

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{20}{240} - \frac{80}{220}}{\sqrt{\frac{5}{23}\left(1-\frac{5}{23}\right)\left(\frac{1}{240}+\frac{1}{220}\right)}} = -7{,}2807.$$

Kritický obor je

$W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -u_{0,995}\rangle \cup \langle u_{0,995}, \infty) = (-\infty, -2{,}5758\rangle \cup \langle 2{,}5758, \infty)$. Protože testové kritérium patří do kritického oboru, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Podíl šancí ve čtyřpolní kontingenční tabulce

Ve čtyřpolních tabulkách používáme charakteristiku $OR = \frac{ad}{bc}$, která se nazývá výběrový podíl šancí (odds ratio). Považujeme ho za odhad neznámého teoretického podílu šancí $o\rho = \frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}\pi_{12}}$. Můžeme si představit, že pokus se provádí za dvojích různých okolností a může skončit buď úspěchem nebo neúspěchem.

Výsledek pokusu	okolnosti		$n_{j.}$
	I	II	
úspěch	a	b	a+b
neúspěch	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Poměr počtu úspěchů k počtu neúspěchů (tzv. šance) za 1. okolností je $\frac{a}{c}$, za druhých okolností je $\frac{b}{d}$. Podíl šancí je tedy $OR = \frac{ad}{bc}$.

Jsou-li veličiny X, Y nezávislé, pak $\pi_{jk} = \pi_{j.}\pi_{.k}$, tudíž teoretický podíl šancí $o\rho = 1$. Závislost veličin X, Y bude tím silnější, čím více se $o\rho$ bude lišit od 1. Avšak $o\rho \in \langle 0, \infty)$, tedy hodnoty $o\rho$ jsou kolem 1 rozmístěny nesymetricky. Z tohoto důvodu raději používáme logaritmus teoretického či výběrového podílu šancí.

Testování nezávislosti ve čtyřpolních tabulkách pomocí podílu šancí

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\ln o\rho = 0$) proti alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\ln o\rho \neq 0$).

Testová statistika $T_0 = \dfrac{\ln OR}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}}$ se asymptoticky řídí rozložením $N(0,1)$, když nulová hypotéza platí.

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Nulovou hypotézu tedy zamítáme na asymtotické hladině významnosti α, když se testová statistika realizuje v kritickém oboru W.

Testování nezávislosti lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro logaritmus podílu šancí $o\rho$, který je dán vzorcem:

$$(d, h) = \left(\ln OR - \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2}, \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2} \right)$$

Jestliže interval spolehlivosti neobsahuje 0, pak hypotézu o nezávislosti zamítneme na asymptotické hladině významnosti α.

Příklad (testování nezávislosti pomocí podílu šancí a pomocí statistiky K):
U 125 uchazečů o studium na jistou fakultu byl hodnocen dojem, jakým zapůsobili na komisi u ústní přijímací zkoušky. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že přijetí na fakultu nezávisí na dojmu u přijímací zkoušky.

přijetí	dojem		$n_{j.}$
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

Řešení:
a) Testování pomocí podílu šancí:
$OR = \frac{ad}{bc} = \frac{17 \cdot 58}{11 \cdot 39} = 2{,}298$. Podíl šancí nám říká, že uchazeč, který zapůsobil na komisi dobrým dojmem, má asi 2,3 x větší šanci na přijetí než uchazeč, který zapůsobil špatným dojmem.

Provedeme další pomocné výpočty:
$\ln OR = 0{,}832,$

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{11}+\frac{1}{39}+\frac{1}{58}} = 0{,}439,\ u_{0{,}975} = 1{,}96$$

Dosadíme do vzorců pro meze asymptotického intervalu spolehlivosti pro logaritmus podílu šancí:

$$\ln d = \ln OR - \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\,u_{1-\alpha/2} = 0{,}832 - 0{,}439 \cdot 1{,}96 = -0{,}028,\ \ln h = \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\,u_{1-\alpha/2} = 0{,}832 + 0{,}439 \cdot 1{,}96 = 1{,}692$$

Protože interval (-0,028; 1,692) obsahuje číslo 0, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti dojmu u přijímací zkoušky a přijetí na fakultu.

b) Testování pomocí statistiky K:

přijetí	dojem		$n_{j.}$
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{28 \cdot 56}{125} = 12{,}544, \quad \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{28 \cdot 69}{125} = 15{,}456,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{97 \cdot 56}{125} = 43{,}456, \quad \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{97 \cdot 69}{125} = 53{,}544$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Dosadíme do zjednodušeného vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{125 \cdot (17 \cdot 58 - 11 \cdot 39)^2}{28 \cdot 97 \cdot 56 \cdot 69} = 3{,}6953$$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{0,95}(1), \infty) = \langle 3{,}841, \infty)$.

Protože testová statistika se nerealizuje k kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme ještě Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}} = \sqrt{\frac{3{,}6953}{125(2-1)}} = 0{,}1719$

Vidíme, že mezi dojmem u přijímací zkoušky a přijetím na fakultu je pouze slabá závislost.

Poznámka k jednostranným alternativám:
Nulová hypotéza tvrdí, že podíl šancí je roven 1, tj. H_0: $o\rho = 1$.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch vyšší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme pravostrannou alternativu
H_1: $o\rho > 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch pravostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický levostranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch nižší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme levostrannou alternativu
H_1: $o\rho < 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch levostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický pravostranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Pokud jsou šance na úspěch stejné za prvních i druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme oboustrannou alternativu
H_1: $o\rho \neq 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch oboustranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Příklad: U 24 žáků 6. třídy základní školy bylo zjišťováno, zda jsou úspěšní v matematice (tj. mají na posledním vysvědčení známku 1 nebo 2 z matematiky) a zda hrají na nějaký hudební nástroj. Z 10 úspěšných matematiků 6 hrálo na nějaký hudební nástroj, kdežto ve skupině neúspěšných matematiků hrál pouze 1 žák na hudební nástroj. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že úspěch v matematice a hra na hudební nástroj jsou nezávislé veličiny. Proti nulové hypotéze postavte

a) oboustrannou alternativu, tj. tvrzení, úspěch v matematice a hra na hudební nástroj spolu souvisí,
b) pravostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou vyšší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj,
c) levostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou nižší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj.

Řešení:

Máme kontingenční tabulku

úspěch v M	hra na hudební nástroj		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	6	4	10
ne	1	13	14
$n_{.k}$	7	17	24

Vypočteme podíl šancí: $\mathrm{OR} = \frac{ac}{bd} = \frac{6 \cdot 13}{4 \cdot 1} = \frac{39}{2} = 19{,}5$. Podíl šancí nám říká, že žák, který hraje na nějaký hudební nástroj, má 19,5 x větší šanci na úspěch v matematice než žák, který nehraje na žádný hudební nástroj.

Ad a)
Pro testování nulové hypotézy proti oboustranné alternativě sestrojíme oboustranný interval spolehlivosti:
Dolní a horní mez intervalu spolehlivosti pro oρ zjistíme pomocí STATISTIKY. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných DM a HM a jednom případu. Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:
=log(19,5)-sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,975;0;1)
a analogicky do Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro horní mez:
=log(19,5)+sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,975;0;1)

	1 DM	2 HM
1	0,575093	5,365736

Vidíme, že 0,575093 < ln oρ < 5,365736 s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch oboustranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že úspěch v matematice souvisí s hrou na hudební nástroj.

Ad b)
Pro testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě sestrojíme levostranný interval spolehlivosti:
Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:
=log(19,5)-sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,95;0;1)

	1 DM
1	0,960198

Protože interval (0,960198; ∞) neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají vyšší šance na úspěch v matematice.

Ad c)
Pro testování nulové hypotézy proti levostranné alternativě sestrojíme pravostranný interval spolehlivosti:
Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro dolní mez:
=log(19,5)+sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,95;0;1)

	1 HM
1	4,980631

Protože interval (-∞; 4,980631) obsahuje 0, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch levostranné alternativy. Neprokázalo se tedy, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají nižší šance na úspěch v matematice.