

Cvičení 10

Optimalizace systémů hromadné obsluhy (s neomezenou kapacitou)

1. Systém M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ , doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Známe náklady c_1 na obsluhu jednoho požadavku a náklady c_2 na údržbu prázdného systému za jednotku času. Hledáme intenzitu obsluhy μ tak, aby funkce nákladů a ztrát

$$F(\mu) = c_1\mu + c_2E(N) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

nabývala svého minima. Vzhledem k tomu, že systém musí být schopen se stabilizovat (tj.

$\lambda < \mu$), je minima dosaženo pro $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \lambda$.

Optimální intenzitu obsluhy a hodnotu funkce nákladů a ztrát pro tuto optimální intenzitu počítá funkce `opt_neomezeny_1.m`.

Příklad 1.: Na konci montážní linky se nachází pracoviště kontroly kvality, které se skládá z prostoru na čekání palet a zkušebního pracoviště. Průměrně přichází 80 palet v průběhu osmihodinové směny. Doba mezi příchody palet má exponenciální rozložení a doba kontroly rovněž. Náklady na kontrolu jedné palety činí 100 Kč, prostojové náklady jsou 40 Kč/h. Stanovte optimální dobu kontroly jedné palety a najděte hodnotu funkce nákladů a ztrát pro optimální intenzitu obsluhy.

Výsledek: 5 minut, tedy za 1 h by se mělo zkontrolovat 12 palet. Funkce nákladů a ztrát nabývá hodnoty 1400.

Příklad 2.: V dílně dochází v průměru ke třem poruchám strojů za hodinu, přičemž se jedná o poissonovský proud. Prostojové náklady stroje jsou 1000 Kč/h. Můžeme volit mezi průměrným opravářem, který opravuje 4 stroje za 1 h a stojí i režii 500 Kč/h a zkušeným opravářem, který opravuje 5 strojů za 1 h a stojí i s režií 650 Kč/h. V obou případech předpokládáme, že doba opravy se řídí exponenciálním rozložením. Kterého opraváře je výhodnější přijmout?

Výsledek: Funkce nákladů a ztrát pro průměrného opraváře nabývá hodnoty 3500, pro zkušeného opraváře 2150, je tedy výhodnější přijmout zkušeného opraváře.

2. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ , doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem μ . Známe náklady c_1 na čekajícího zákazníka za jednotku času a náklady c_2 na nevyužitou linku obsluhy za jednotku času. Hledáme počet linek n tak, aby kritériální funkce

$$C(n) = c_1 E(N_Q) + c_2 [n - E(N_S)]$$

nabývala svého minima.

$$\text{Přitom } E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}, \quad P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{a_n}{1-\rho}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \rho = \frac{\beta}{n},$$

$$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}, \quad E(N_S) = n\rho. \quad \text{Podmínka stabilizace: } n > \frac{\lambda}{\mu}.$$

Optimální počet linek a hodnotu kritériální funkce pro tento optimální počet linek počítá funkce `opt_neomezeny_n.m`.

Příklad 3.: V nově otevřené pobočce České spořitelny bylo rozhodnuto rezervovat pro operace se spořiročným účtem 3 přepážky. Klienti, kteří do pobočky přicházejí kvůli těmto operacím, se řadí do jedné fronty a po uvolnění libovolné z přepážek mohou být obsluhováni. Po otevření pobočky bylo zjištěno, že v průměru přichází 68 klientů za hodinu, přičemž intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba nutná pro odbavení klienta je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 min 24 s.

a) Za předpokladu, že náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h jsou 120 Kč a náklady na provoz jedné přepážky činí 300 Kč/h, najděte optimální počet přepážek.

b) Zjistěte, jak by se musely snížit náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h, aby byl optimální původně uvažovaný systém se třemi přepážkami.

Výsledek:

Ad a)

n	C(n)
3	1050,2
4	485,53
5	708,69

Optimální jsou 4 přepážky.

Ad b) Náklady na čekajícího zákazníka nesmí přesáhnout 41,56 Kč za hodinu.

Příklad 4.: Manažer fastfoodu se rozhodl optimalizovat večerní provoz pokladen. Zákazníci, kteří do restaurace přicházejí, se řadí do jedné fronty a po uvolnění jakékoli pokladny jsou obsluženi. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že zákazníci přicházejí s průměrnou intenzitou 40 osob za 1 h s tím, že intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba nutná pro obslužení zákazníka je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou 4 minuty. Za předpokladu, že náklady na pobyt zákazníka v restauraci po dobu 1 h jsou 100 Kč a náklady na provoz jedné pokladny za 1 h jsou 110 Kč, najděte optimální počet pokladen.

Výsledek:

n	C(n)
3	693,08
4	227,17
5	276,62

Optimální jsou 4 pokladny.