Cvičení 12

Pravděpodobnostní vytvořující funkce

Definice: Nechť X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $P(X=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$. Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X je dána vztahem: $g_X(z)=E\left(z^X\right)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, kde $|z|\le 1$.

Vlastnosti:

a) $p_k = \left.\dfrac{g_X^{(k)}(z)}{k!}\right|_{z=0}$ pro k = 0, 1, 2, …

b) $E(X)=\dfrac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1}$, $D(X)=\dfrac{d^2}{dz^2} g_X(z)+E(X)-[E(X)]^2$.

c) X_1, ..., X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$
$\Rightarrow$ $g_Y(z)=g_{X_1}(z)\cdot \ldots \cdot g_{X_n}(z)$.

d) X_1, ..., X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ..., n.

Pak transformovaná náhodná veličina $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ má pravděpodobnostní funkci

$P(Y=k)=\begin{cases} \{p_k\}^{n*} \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

e) Nechť X_1, X_2, ... je posloupnost stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ... Nechť N je celočíselná nezáporná náhodná veličina nezávislá na X_1, X_2, ... s pravděpodobnostní funkcí $P(N=n)=\begin{cases} q_n \text{ pro } n=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

Pak náhodná veličina $S = X_1 + ... + X_N$ (tj. součet náhodného počtu náhodných veličin) má pravděpodobnostní funkci $P(S=k)=h_k=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

f) Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny $S = X_1 + ... + X_N$ platí:
$g_S(z) = g_N(g_X(z))$.

g) $E(S) = E(N)\mu$, $D(S) = D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$, kde $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = D(X_i)$, i = 1, 2, …

Příklad 1.: Pomocí pravděpodobnostních vytvořujících funkcí najděte střední hodnoty a rozptyly těchto rozložení: a) $A(\vartheta)$, b) $Bi(n,\vartheta)$, c) $Ge(\vartheta)$.
Výsledek: ad a) $E(X)=\vartheta, D(X)=\vartheta(1-\vartheta)$, ad b) $E(X)=n\vartheta, D(X)=n\vartheta(1-\vartheta)$, ad c) $E(X)=\dfrac{1-\vartheta}{\vartheta}, D(X)=\dfrac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$

Příklad 2.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém 0,2 a ve třetím 0,1. Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y, která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech.
a) Vyjádřete pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y.
b) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte E(Y) a D(Y).
c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y.
Výsledek:
ad a) $g_Y(z)=0{,}36+0{,}49z+0{,}14z^2+0{,}01z^3$, ad b) $E(Y)=0{,}8, D(Y)=0{,}5$
ad c) p_0 = 0,36, p_1 = 0,49, p_2 = 0,14, p_3 = 0,01