Cvičení 13

Galtonův – Watsonův proces větvení

Definice: Nechť jedinec tvořící nultou generaci může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům (potomkům) první generace. Analogicky každý jedinec z první generace může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům druhé generace atd. Přitom předpokládáme, že
a) počet potomků X náhodně zvoleného jedince má pravděpodobnostní funkci
$P(X = k) = \begin{cases} p_k \text{ pro } k = 0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, která nezávisí na zvoleném jedinci ani na generaci, do níž přísluší;
b) jedinci z dané generace dávají vzniknout svým potomkům vzájemně nezávisle.
Označme X_n počet jedinců n-té generace (speciálně je $X_0 = 1$). Za uvedených předpokladů posloupnost náhodných veličin $\{X_n; n \in N_0\}$ tvoří homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0, 1, 2, ...}. Tento řetězec se nazývá Galtonův – Watsonův proces větvení.

Vlastnosti:

1. Matice přechodu má tvar $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0^{\,2} & 2p_0p_1 & p_1^{\,2} + 2p_0p_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$, tj. $\forall i, j \in J : p_{ij} = \{p_j\}^{i*}$.

2. Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_{n+1} platí:
$g_{X_{n+1}}(z) = \begin{cases} g_{X_n}(g_X(z)) \text{pro} n = 1,2,\ldots \\ 0 \text{pro} n = 0 \end{cases}$, kde $g_X(z)$ je pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X_1.

3. Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X_n platí:
$E(X_n) = \mu^n$, $D(X_n) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2\mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1} \text{pro} \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 \text{pro} \mu = 1 \end{cases}$, kde $\mu = E(X_1), \sigma^2 = D(X_1)$

4. Pro pravděpodobnost vyhynutí v n-té generaci platí: $P(X_n = 0) = q_n = g_{X_n}(0)$

5. Pro limitní pravděpodobnost vyhynutí platí:
a) Je-li $\mu \leq 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.
b) Je-li $\mu > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0,1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice $z = g_X(z)$.

Příklad: Uvažme G – W proces, v němž $p_0 = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{1}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, p_k = 0$, k = 3,4,…

a) Vypočtěte prvky matice přechodu **P** pro i = 0, 1, 2 a j = 0, 1, 2, 3, 4.
b) Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci počtu jedinců ve 2. generaci.
c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce počtu jedinců ve 2. generaci vypočtěte pravděpodobnostní funkci.
d) Najděte střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců ve 2. generaci.
e) Vypočtěte limitní pravděpodobnost vyhynutí.

Výsledky:

Ad a)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{7}{25} & \frac{6}{25} & \frac{9}{25} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ad b) $g_{X_2}(z) = \frac{33}{125} + \frac{11}{125} z + \frac{36}{125} z^2 + \frac{18}{125} z^3 + \frac{27}{125} z^4$

Ad c) $P(X_2 = 0) = \frac{33}{125}$, $P(X_2 = 1) = \frac{11}{125}$, $P(X_2 = 2) = \frac{36}{125}$, $P(X_2 = 3) = \frac{18}{125}$, $P(X_2 = 4) = \frac{27}{125}$

Ad d) $E(X_2) = \frac{49}{25} = 1{,}96$, $D(X_2) = \frac{1344}{625} = 2{,}15$

Ad e) Limitní pravděpodobnost vyhynutí je $\frac{1}{3}$.

Praktická aplikace Galtonova – Watsonova procesu větvení v demografii

Výchozí data
Budeme vyšetřovat sled generací ženské populace Československa. Máme k dispozici údaje z roku 1961, které popisují rozdělení žen ve věkovém intervalu (45 let, 50 let) (tedy na konci reprodukčního období) podle počtu živě narozených dětí. Žen v tomto věkovém intervalu bylo 450259.

Tabulka 1 - výchozí data

počet dětí	označení	počet žen
0	c0	65387
1	c1	78901
2	c2	136150
3	c3	79878
4	c4	39387
5	c5	19856
6	c6	15365
7	c7	7683
8	c8	3841
9	c9	1921
10	c10	960
11	c11	480
12	c12	240
13	c13	120
14	c14	60
15	c15	30

Stanovení pravděpodobnosti narození dcery, která se dožije reprodukčního věku 25 let
Zajímají nás pouze potomci ženského pohlaví. Je známo, že v r. 1961 byl poměr počtu živě narozených chlapců k počtu živě narozených dívek 1,055 (tzv. ukazatel maskulinity). Tedy pravděpodobnost narození dívky je $\frac{1}{1+1{,}055}$. Dále je známo z úmrtnostních tabulek ČSR pro rok 1961, že pravděpodobnost dožití 25 let pro ženu je 0,96788. Tedy hodnotu

h = 0,96788 . $\frac{1}{1+1{,}055}$ = 0,470988 lze považovat za pravděpodobnost, že živě narozený potomek je dcera, která se dožije věku 25 let.

Rozložení počtu žen podle počtu dcer, které se dožijí reprodukčního věku 25 let
Nechť c_i je počet žen s i potomky. Z vlastností binomického rozložení plyne, že z počtu c_i připadá $(1-h)^i c_i$ na ženy s žádnou 25 letou dcerou, $ih(1-h)^{i-1}c_i$ na ženy s právě jednou 25 letou dcerou atd.

Tabulka 2 – rozdělení p_0, p_1, ... žen podle počtu 0, 1, ... 25 letých dcer konstruované na základě počtů c_0, c_1, ... žen s 0, 1, ... potomky.

počet potomků	počet žen	rozdělení žen podle počtu 25 letých dcer			
		0	1	2	…
0	c_0	c_0	0	0	…
1	c_1	$(1-h)c_1$	hc_1	0	…
2	c_2	$(1-h)^2c_2$	$2h(1-h)c_2$	h^2c_2	…
3	c_3	$(1-h)^3c_3$	$3h(1-h)^2c_3$	$3h^2(1-h)c_3$	…
4	c_4	$(1-h)^4c_4$	$4h(1-h)^3c_4$	$6h^2(1-h)^2c_4$	…
.	.	.	.	.	…
.	.	.	.	.	…
.	.	.	.	.	…
suma	c	p_0c	p_1c	p_2c	

Numerické vyhodnocení

počet potomků	počet žen	rozdělení žen podle počtu 25 letých dcer					
		0	1	2	3	4	…
0	65387	65387	0	0	0	0	…
1	78901	41740	37161	0	0	0	…
2	136150	38102	67846	30202	0	0	…
3	79878	11826	31586	28121	8645	0	…
4	39387	3045	10985	14671	8708	1938	0
.	.	.	.		.		…
.	.	.	.		.		…
.	.	.	.		.		…
suma	450259	161420	153833	85789	31330	11549	

$p_0 = \dfrac{161420}{450259}$ = 0,358504, p_1 = 0,3416544, p_2 = 0,1905325, p_3 =0,0695821, …
Střední hodnota $\mu = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + ...$ = 0,341655 + 2.0,190533 + 3.0,069583 + ... = 1,111166 >1

Matice pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0^2 & 2p_0p_1 & p_1^2 + 2p_0p_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$. V našem případě tedy dostáváme:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0{,}358504 & 0{,}341655 & 0{,}190533 & 0{,}069583 & \cdots \\ 0{,}128525 & 0{,}244969 & 0{,}253342 & 0{,}180085 & \cdots \\ 0{,}046077 & 0{,}131733 & 0{,}199067 & 0{,}206734 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnostní rozložení počtu 25 letých dcer v n-té generaci

Pro vektor absolutních pravděpodobností platí zákon evoluce: **p**(n) = **p**(0).**P**^{n}.
V následující tabulce jsou uvedeny složky vektoru **p**(n) pro n = 0, 1, ..., 10

Tabulka 3 – pravděpodobnostní rozložení $p_i(n)$ počtu i 25 letých dcer v n-té generaci

n \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	...
1	0,358504	0,341655	0,190533	0,065830	0,025651	0,009428	0,003191	0,001013	...
2	0,509170	0,174495	0,131214	0,078222	0,046294	0,026754	0,015134	0,008447	...
3	0,593159	0,105974	0,090446	0,064523	0,045799	0,031962	0,022014	0,015040	...
4	0,646756	0,071021	0,065064	0,051054	0,039920	0,030799	0,023537	0,017881	...
5	0,683843	0,050729	0,048627	0,040485	0,033619	0,027604	0,022493	0,018246	...
6	0,710930	0,037884	0,037477	0,032484	0,028103	0,024071	0,020485	0,017367	...
7	0,731494	0,029234	0,029590	0,026409	0,023533	0,020781	0,018246	0,015970	...
8	0,747563	0,023131	0,023824	0,021736	0,019805	0,017894	0,016085	0,014416	.
9	0,760402	0,018665	0,019489	0,180087	0,016768	0,015422	0,014117	0,012887	.
10	0,770845	0,015300	0,016151	0,015194	0,014281	0,013322	0,012371	0,011460	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

V prvním sloupci jsou pravděpodobnosti vyhynutí (v ženské linii). Je vidět, že v 10. generaci je pravděpodobnost vyhynutí $p_0(10) = 0,770845$ hodně vysoká. Naproti tomu pravděpodobnosti libovolného nenulového počtu dcer jsou velice malé (např. pro jednu dceru $p_1(10) = 0,015300$ a s rostoucím počtem generací se stále snižují.

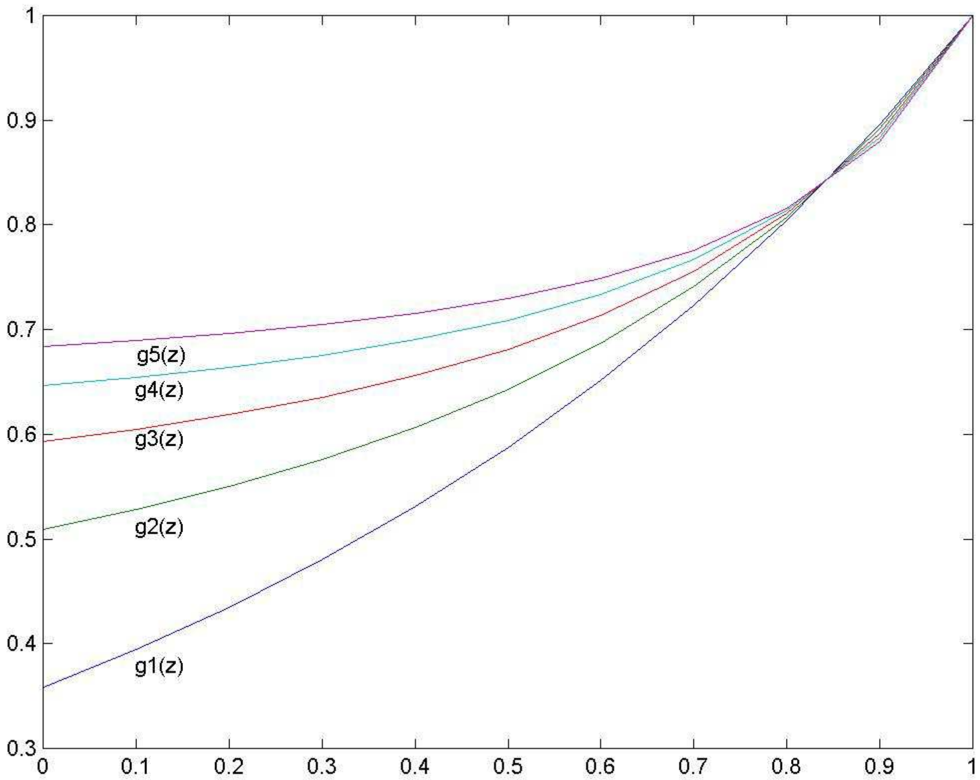
Vytvořující funkce počtu 25 letých dcer v n-té generaci

$$g_{X_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} z^k$$

Tabulka 4 – hodnoty vytvořující funkce $g_n(z)$ počtu 25 letých dcer v n-té generaci

z	g1(z)	g2(z)	g3(z)	g4(z)	g5(z)
0,0	0,358504	0,509170	0,593159	0,646756	0,683843
0,1	0,394647	0,528015	0,604730	0,654564	0,689446
0,2	0,435057	0,550027	0,618573	0,664047	0,696322
0,3	0,480260	0,575893	0,635302	0,675717	0,704892
0,4	0,530872	0,606507	0,655773	0,690318	0,715785
0,5	0,587619	0,643056	0,681205	0,708964	0,729979
0,6	0,651360	0,687140	0,713398	0,733401	0,749073
0,7	0,723115	0,740967	0,755101	0,766513	0,775872
0,8	0,804109	0,807566	0,810729	0,813400	0,815726
0,9	0,895811	0,891733	0,887770	0,883881	0,880022
1,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

Průběhy vytvořujících funkcí



Pravděpodobnost vyhynutí

Limitní hodnotu pravděpodobnosti vyhynutí lze získat jako nejmenší kladný kořen rovnice $z=g(z)$, kde $g(z) = g_1(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots$

V našem případě řešíme rovnici $z = 0{,}358504 + 0{,}341655z + 0{,}190533z^2 + 0{,}069583z^3 + \dots$

Výsledek: $\xi = 0{,}834043$.

Je zajímavé posoudit rychlost konvergence posloupnosti q_n pravděpodobnosti vyhynutí potomků v ženské linii v jednotlivých generacích k příslušné limitní hodnotě $\xi = 0{,}834043$ - viz 1. sloupec v tabulce 3.

Pro zajímavost ještě uvedeme limitní hodnoty pravděpodobnosti vyhynutí potomků v ženské linii pro různé země (údaje jsou z roku 1960).

země	ξ
Peru	0,2620
Japonsko	0,3242
Mexiko	0,4066
Maďarsko	0,7130
USA	0,8209