Cvičení 4

Příklady na využití Poissonova rozložení

Příklad 1.: Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozložením Po(2). Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k aspoň jedné poruše?
[0,8647]

Příklad 2.: Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí a) právě jeden hovor, b) aspoň dva hovory?
[ad a) 0,368, ad b) 0,264]

Příklad 3.: Ze zkušenosti víme, že při správné obsluze stroje je v průměru 0,1% výrobků zmetkových. Ke stroji nastoupil nový pracovník. Za týden vyrobil 5 000 kusů, z nichž 11 bylo zmetkových. Lze takto vysoký počet zmetků vysvětlit působením náhodných vlivů?
[Nikoliv, pravděpodobnost, že při správné obsluze stroje se vyrobí aspoň 11 zmetků, je pouze 0,0137.]

Příklad 4.: Semena rostlin určitého druhu jsou znečištěna malým množstvím plevele. Je známo, že na jedné jednotce plochy vyrostou po osetí v průměru 4 rostliny plevele. Vypočítejte pravděpodobnost, že na dané jednotce plochy:
a) nebude žádný plevel,
b) vyrostou nejvýše 3 rostliny plevele,
c) vyroste aspoň 5, ale nejvýše 7 rostlin plevele.
[ad a) 0,0183, ad b) 0,4335, ad c) 0,32]

Příklad 5.: V prodejně posunuli zavírací dobu ve všední dny z 18 na 19 hodin. Sestrojte 90% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zákazníků v této době, navštívilo-li prodejnu ve 30 náhodně zvolených dnech ve sledované době celkem 225 zákazníků. Přitom předpokládáme, že počet zákazníků v určitém časovém intervalu má Poissonovo rozložení.
[Střední hodnota počtu zákazníků se s pravděpodobností přibližně 90 % nachází v mezích od 6,68 do 8,32.]

Příklad 6.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 1,2,3,\cdots$ platí: $x\pi(x) = \lambda\pi(x-1)$.
Pravděpodobnostní funkci Poissonova rozložení lze tedy vyjádřit rekurzívně:
$\pi(x) = \dfrac{\lambda}{x}\pi(x-1)$ pro x = 1, 2, 3, …, $\pi(0) = e^{-\lambda}$

Příklad 7.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 0,1,2,\cdots$ platí: $\Phi(x) = \dfrac{\Gamma(x+1,\lambda)}{\Gamma(x+1)}$, kde

$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $\Gamma(a,\lambda) = \int_\lambda^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$,

pro přirozené a: $\Gamma(a) = (a-1)!$, $\Gamma(a,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^{a-1} + (a-1)e^{-\lambda}\lambda^{a-2} + \ldots + (a-1)!e^{-\lambda}$

Práce se systémem MATLAB

Úkol 1.: Na výrobní lince se zhruba každé dvě hodiny vyskytne porucha. Sestrojte tabulku uvádějící, s jakou pravděpodobností se na této lince během osmihodinové pracovní směny nevyskytne žádná porucha, vyskytne jedna porucha, vyskytnou dvě poruchy atd. až vyskytne deset poruch. S jakou pravděpodobností nastane více než deset poruch? Určete nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny.

Výsledná tabulka:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi(n)$	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053
$\Phi(n)$	0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972

Pravděpodobnost, že počet poruch je větší než deset, je 0,0028.

Nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny je tři až čtyři.

Návod pro MATLAB:
```
x=[0:10]';
pf=poisspdf(x,4);
df=poisscdf(x,4);
[x pf df]
```

Grafické znázornění:
```
plot(x,pf,'o')
figure
stairs(x,df)
```

Nepovinný úkol: Jak nakreslit graf distribuční funkce bez svislých čar?
Jedno z možných řešení:
```
hold on
for i=1:(length(x)-2) plot([i,i],[0,1],'w'); end
```

Úkol 2.: Pro n = 30 a ϑ = 0,1 ilustrujte aproximaci binomického rozložení Bi(n, ϑ) Poissonovým rozložením Po(nϑ). Vypočtené hodnoty obou pravděpodobnostních funkcí v bodech x = 0, 1, …, 30 zapište do tabulky a znázorněte graficky.
Návod:
```
x=[0:1:30]';
pf1=binopdf(x,30,0.1);
pf2=poisspdf(x,3);
[x pf1 pf2]
plot(x,pf1,'o',x,pf2,'*')
```

Úkol 3.: Vygenerujte 100 realizací náhodné veličiny s rozložením Po(2) a nakreslete jejich histogram.
Návod:
```
r=poissrnd(2,100,1);
hist(r,x)
```

Úkol 4.: Odhadněte střední hodnotu a vypočtěte meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu na základě proměnné r z předešlého úkolu. (Hodnoty uložené v proměnné r považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 100 z rozložení Po(2).)

Návod:

[m,meze]=poissfit(r)

Upozornění: MATLAB počítá meze intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ podle vzorce:

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm),\ h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2(nm+1)),$$

nikoliv podle vzorce $d = m - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2}$, který využívá aproximaci Poissonova rozložení normálním rozložením.

Úkol 5.: U 32 náhodně vybraných tabulí hliníkového plechu určeného k pokrývání střech byly zjištěny tyto počty povrchových závad:

Počet tabulí	0	1	2	3	4	5	6
Počet závad	10	8	6	4	2	1	1

Předpokládáme, že počet povrchových závad připadajících na jednu tabuli hliníkového plechu se řídí Poissonovým rozložením

a) Jaká je pravděpodobnost, že u náhodně vybrané tabule se vyskytnou aspoň 3 povrchové závady?

b) Vypočtěte meze 95% asymptotického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu počtu povrchových závad připadajících na jednu tabuli hliníkového plechu.

Návod: Parametr λ odhadneme pomocí váženého průměru.

Zadáme varianty veličiny X, jejich absolutní četnosti, vypočítáme celkový rozsah výběru a vážený průměr:

x=[0:6]’; nj=[10 8 6 4 2 1 1]’; n=sum(nj); m=x’*nj/n

Dostaneme m = 1,5938.

Ad a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \text{poisscdf}(2{,}1.5938) = 0{,}215$

Ad b) $d = m - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1{,}5938 - \frac{1}{64} - \sqrt{\frac{1{,}5938}{32}} \cdot 1{,}96 = 1{,}1407$, h = 2,0468

d=m-0,5*n-sqrt(m/n)*norminv(0.975,0,1) = 1,1407

h=m+0,5*n+sqrt(m/n)*norminv(0.975,0,1) = 2,0468

Nepovinný úkol: Stanovte meze 95% intervalu spolehlivosti pro λ pomocí funkce poissfit.

Výsledek: 1,1867 < λ < 2,0955 s pravděpodobností aspoň 0,95.