Cvičení 8.: Příklady na systémy M/M/n/∞/FIFO, M/M/1/1 a M/M/n/m/FIFO

1. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Podíl $\rho = \frac{\beta}{n}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,n \\ \frac{\beta^j}{n!\,n^{j-n}} a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2,\dots \end{cases}$, kde $a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1}$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

$E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$, $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$, $E(N_S) = n\rho$.

$E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$, $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$, $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Využití systému: $\kappa = \rho$.

Příklad 1.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtěte

a) pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta

b) střední hodnotu počtu obsazených stojanů

c) střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.

Výsledky: ad a) 0,0567, ad b) 1,875, ad c) 20 min 38 s

Příklad 2.: V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování 1 požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba zpracování jednoho požadavku se řídí exponenciálním rozložením.

a) Může se systém stabilizovat?

b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování?

c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování?

Výsledky: ad a) ano, ad b) 3,51, ad c) 24 min

2. Systém M/M/1/1

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je 1 (zákazník nemůže čekat ve frontě a je-li systém obsazený, odchází bez obsloužení).

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

$P_Z = a_1$, $\lambda_P = \lambda a_0$, $\lambda_Z = \lambda a_1$, $\kappa = \rho a_0 = \frac{\lambda}{\mu} a_0$, $E(N) = a_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $E(W) = \frac{1}{\lambda+\mu}$

Příklad 3.: Pracovnice v informačním středisku přijme v průměru jedno volání každých 12 minut. Hovor trvá v průměru 6 minut. Pokud je linka obsazena, volající nečeká a zavěsí. Za předpokladu, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba trvání hovoru se řídí exponenciálním rozložením, najděte odpovědi na následující otázky:
a) Jaké procento volání bude odbaveno?
b) Kolik hovorů se uskuteční za 1 h?
c) Jaká je pravděpodobnost odmítnutí?
Výsledky: ad a) 0,67, ad b) 3,3, ad c) 0,33

3. Systém M/M/n/m/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je omezená (je rovna m) a frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$. Systém se může stabilizovat vždy.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n}{n!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}$, kde $a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{j=n}^{m}\rho^j}$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

$P_Z = \frac{n^n}{n!}\rho^m a_0$, $P_Q = \begin{cases} a_n \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$, $\lambda_P = \lambda(1-P_Z)$, $\lambda_Z = \lambda P_Z$, $E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n) a_j$,

$E(N_S) = \beta(1-P_Z)$, $\kappa = \rho(1-P_Z)$.

Příklad 4.: V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.
a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?
b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.
c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.
d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?
e) Vypočtěte využití systému.

Výsledky: ad a) $a_0 = \frac{125}{272} = 0{,}4596, a_1 = \frac{75}{272} = 0{,}2757, a_2 = \frac{45}{272} = 0{,}1654, a_3 = \frac{27}{272} = 0{,}0993$

ad b) $E(N_Q) = \frac{99}{272} = 0{,}364, E(N_S) = \frac{147}{272} = 0{,}5404, E(N) = \frac{246}{272} = 0{,}9044$

ad c) $E(W_Q) = \frac{33}{272} = 7 \min 18 s$, ad d) $1 - a_3 = \frac{245}{272} = 0{,}9$

ad e) $\kappa = \frac{147}{272} = 0{,}54$