Cvičení 9.: Příklady na SHO řešené pomocí MATLABu

1. Systém M/M/1/∞/FIFO
Charakteristiky stabilizovaného systému poskytne funkce neomezeny_1.m
% [a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupního proudu, mi .... parametr obsluhy
% Výstupní parametry:
% a0 .... pravděpodobnost, že v systému nebude žádný zákazník
% ro .... intenzita provozu
% ENS .... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ .... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN .... střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS .... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ .... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW .... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte
a) využití ortopeda, b) pravděpodobnost, že pacient nebude čekat, c) střední hodnotu doby, kterou pacient stráví v systému, d) střední hodnotu počtu pacientů v systému.
Výsledky: Za časovou jednotku volíme 1h, systém se může stabilizovat.
Ad a) Ortoped je využit na 66,6 %. Ad b) $a_0 = 1 - \rho = 0,\overline{3}$.
Ad c) $E(W) = 1$ h, $E(W_Q) = 40$ min, $E(W_S) = 20$ min
Ad d) $E(N) = 2$, $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$, $E(N_S) = \frac{2}{3}$
Návod na řešení pomocí MATLABu:
lambda=2;mi=3;
[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)

Příklad 2.: K poštovní přepážce přichází v průměru 15 klientů za 1 h. Průměrná doba obsluhy u přepážky činí 3 minuty. Předpokládáme, že doba mezi příchody zákazníků i doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se provoz u poštovní přepážky může stabilizovat. Pokud ano, vyřešte tyto úlohy:
a) Jaká je pravděpodobnost, že klient bude muset čekat ve frontě?
b) Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě budou více než 3 klienti?
c) Jaká je průměrná doba pobytu zákazníka na poště? (Výsledek udejte v minutách.)
Výsledky: Za časovou jednotku volíme 1 min, **s**ystém se může stabilizovat.

Ad a) Pravděpodobnost čekání = $\rho = 0,75$, ad b) $P(N > 3) = 0,3164$, ad c) $E(W) = 12\,\mathrm{min}$

Návod na řešení pomocí MATLABu:
$\mathrm{lambda} = 15, \mathrm{mi} = 20$;
[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)

2. Systém M/M/n/∞/FIFO
Charakteristiky stabilizovaného systému poskytne funkce neomezeny_n.m

```
% [a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
% Vstupní parametry:
% n ......... počet linek obsluhy,
% lambda .... parametr vstupního proudu,
% mi ........ parametr obsluhy
% Výstupní parametry:
% a0 ........ pravděpodobnost, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ........ intenzita provozu (využití systému)
% PQ ........ pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
% ENS ....... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ....... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ........ střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ........ střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
```

Příklad 3.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtěte
a) pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta
b) střední hodnotu počtu obsazených stojanů
c) střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.
Výsledky: Za časovou jednotku volíme 1h, ad a) 0,0567, ad b) 1,875, ad c) 20 min 38 s
Návod na řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=45;mi=24;n=2;
[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
```

Příklad 4.: V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování 1 požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba zpracování jednoho požadavku se řídí exponenciálním rozložením.
a) Může se systém stabilizovat?
b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování?
c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování?
Výsledky: Za časovou jednotku volíme 1 min, ad a) ano, ad b) 3,51, ad c) 24 min
Návod na řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=0,25;mi=0,1;n=2;
[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
```

2. Otevřený systém M/M/n/m/FIFO

Charakteristiky stabilizovaného systému M/M/n/m/FIFO počítá funkce odmitani.m

```
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)
% Vypocita stacionarní rozlozeni, vyuziti a charakteristiky systemu
% hromadne obsluhy s omezenou kapacitou M|M|n|m|FIFO s odmitanim.
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupniho proudu
% mi ........ parametr obsluhy
% n ......... pocet linek obsluhy
% m ......... kapacita systému
% Vystupní parametry:
% a ......... stacionární rozlození
% PZ ........ pravdepodobnost, ze prichozi zakaznik bude odmitnut
% PQ ........ pravdepodobnost, ze prichozi zakaznik bude cekat ve fronte
% lambdaP ... stredni hodnota poctu prijatych zakazniku za jednotku casu
% lambdaZ ... stredni hodnota poctu odmitnutych zakazniku za jednotku casu
% ENS ....... stredni hodnota poctu obsluhovanych zakazniku
% ENQ ....... stredni hodnota poctu zakazniku ve fronte
% EN ........ stredni hodnota poctu zakazniku v systemu
% EWS ....... stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi obsluhou
% EWQ ....... stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi ve fronte
% EW ........ stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi v systemu
```

Příklad 4.: V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?
b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.
c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.
d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?
e) Vypočtěte využití systému.

Výsledky: Za časovou jednotku volíme 1 h.

ad a) $a_0 = \frac{125}{272} = 0{,}4596, a_1 = \frac{75}{272} = 0{,}2757, a_2 = \frac{45}{272} = 0{,}1654, a_3 = \frac{27}{272} = 0{,}0993$

ad b) $E(N_Q) = \frac{99}{272} = 0{,}364, E(N_S) = \frac{147}{272} = 0{,}5404, E(N) = \frac{246}{272} = 0{,}9044$

ad c) $E(W_Q) = \frac{33}{272} = 7\,\mathrm{min}\,18\mathrm{s}$, ad d) $1 - a_3 = \frac{245}{272} = 0{,}9$

ad e) $\kappa = \frac{147}{272} = 0{,}54$

Návod na řešení pomocí MATLABu:

Použijeme funkci odmitani.m

```
lambda=3;mi=5;n=1;m=3;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)
```

Příklad 5.: Do univerzitního bufetu s kapacitou osm stolků po čtyřech místech přichází v průměru 25 studentů za hodinu. V průměru se student zdrží 30 minut. Můžeme předpokládat, že vstupní proud studentů je Poissonův proces a doba pobytu má exponenciální rozložení.

a) Jaká je pravděpodobnost, že bufet bude prázdný?
b) Jaká je pravděpodobnost, že bufet bude plně obsazen?
c) Na kolik procent je bufet využíván?
d) Jaký je průměrný počet volných míst?
e) Jaký je průměrný počet studentů, kteří si nemají kam sednout za hodinu provozu bufetu?
Výsledky: Za časovou jednotku volíme 1 h.
Ad a) $a_0 = 3{,}7267.10^{-6}$, ad b) $P_Z = 1{,}787.10^{-6}$, ad c) 0,391, ad d) 19,5, ad e) $\lambda_Z = 4{,}4675.10^{-5}$

Návod na řešení pomocí MATLABu:
Použijeme funkci odmitani.m
lambda=25;mi=2;n=32;m=32;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

3. Uzavřený (cyklický) systém M/M/n/m/FIFO
Charakteristiky uzavřeného systému M/M/n/m/FIFO počítá funkce uzavreny.m.
[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)
Vstupní parametry:
lambda .... parametr vstupního proudu
mi .... parametr obsluhy
n .... počet linek obsluhy
m .... kapacita systému
Výstupní parametry:
a .... stacionární rozložení
ENS .... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
ENR .... střední hodnota počtu zákazníků mimo systém
EN .... střední hodnota počtu zákazníků v systému
lambdaR ... střední hodnota počtu zákazníků přicházejících za jednotku času
kappa ..... využití systému

Příklad 6.: Skupinu pěti stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Doba bezporuchového provozu stroje má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/2 směny a doba opravy má rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/20 směny.
a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny stroje pracují?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budou současně vyřazeny aspoň dva stroje?
Výsledky: Za časovou jednotku volíme 1 směnu.
Ad a) 0,564, ad b) 0,154

Návod na řešení pomocí MATLABu:
Použijeme funkci uzavreny.m
lambda=2;mi=20;n=1;m=5;
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)