10. Pravděpodobnostní vytvořující funkce

10.1. Definice: Definice pravděpodobnostní vytvořující funkce celočíselné nezáporné náhodné veličiny.
Nechť X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí
$P(X=k)=\begin{cases} p_k & \text{pro } k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$. Pravděpodobnostní vytvořující funkce (dále značena p.v.f.) náhodné veličiny X je dána vztahem: $g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $|z|<1$.

Vysvětlení: Je zřejmé, že p.v.f. je speciálním případem vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:
$G_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. V tomto případě posloupnost $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ splňuje vztahy:

$\forall k=0,1,2,\dots:\ p_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Je také vidět, že $g_X(z)=E\left(z^X\right)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$.

10.2. Příklad: Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X, která má rozložení: a) Po(λ), b) Bi(n, ϑ), c) Ge(ϑ).

Řešení:

ad a) $$p_k = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

ad b) $$p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} \text{ pro } k = 0,1,\dots,n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z\vartheta)^k (1-\vartheta)^{n-k} = (1-\vartheta+z\vartheta)^n$$

ad c) $$p_k = \begin{cases} (1-\vartheta)^k \vartheta \text{ pro } k = 0,1,\dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\vartheta)^k \vartheta z^k = \vartheta \sum_{k=0}^{\infty} \left(z(1-\vartheta)\right)^k = \frac{\vartheta}{1-z(1-\vartheta)}.$$

10.3. Věta: Výpočet pravděpodobnostní funkce pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce.
Je-li $g_X(z)$ p.v.f. náhodné veličiny X, pak pro pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X platí: $p_k = \left.\frac{g_X^{(k)}(z)}{k!}\right|_{z=0}$ pro k = 0, 1, 2, …

Důkaz: Plyne z věty 10.4. kurzu Markovské řetězce, protože p.v.f. je speciálním případem vytvořující funkce.

10.4. Věta: Výpočet střední hodnoty a rozptylu pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce.
Nechť X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s p.v.f. $g_X(z)$. Pak platí:

$$E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1}, \quad D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) + E(X) - [E(X)]^2.$$

Důkaz: $\frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\Big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k z^{k-1}\Big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = E(X)$

$$\frac{d^2}{dz^2} g_X(z)\Big|_{z=1} = \frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\Big|_{z=1} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2}\Big|_{z=1} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

Odtud plyne, že $E(X^2) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) + E(X)$. Protože $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, dostaneme dokazovaný vztah.

10.5. Příklad: Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X ~ Po(λ).

Řešení: Podle příkladu 10.2. (a) $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

$$E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1} = e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda .$$

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{d^2}{dz^2} e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

10.6. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci součtu n stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají p.v.f. $g_{X_1}(z), \ldots, g_{X_n}(z)$. Pak pro p.v.f. transformované náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ platí:

$$g_Y(z) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(z) .$$

Důkaz: $$g_Y(z) = E\left(z^Y\right) = E\left(z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} z^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(z^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(z)$$

10.7. Příklad: Nechť $X_1, ..., X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, 2, .., n$. Najděte pro pravděpodobnostní vytvořující funkci transformované náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} \text{ pro } k = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}, i = 1,2,\ldots,n$,

$g_{X_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{1} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} z^k = \sum_{k=0}^{1} (z\vartheta)^k (1-\vartheta)^{1-k} = 1 - \vartheta + z\vartheta$. Podle věty 10.6. platí:

$g_Y(z) = g_{X_1}(z) \cdot \ldots \cdot g_{X_n}(z) = (1 - \vartheta + z\vartheta)^n \Rightarrow Y \sim Bi(n, \vartheta)$

10.8. Věta: Věta o pravděpodobnostní funkci součtu n stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i = k) = \begin{cases} p_k \text{ pro } k = 0,1,2,\ldots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}, i = 1,\ldots,n$. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má pravděpodobnostní funkci

$$P(Y = k) = \begin{cases} \{p_k\}^{n*} \text{ pro } k = 0,1,2,\ldots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}.$$

Důkaz: Nechť $g_X(z)$ je p.v.f. náhodné veličiny X_i, i = 1, …, n. Pak podle věty 10.6. $g_Y(z) = [g_X(z)]^n$. Podle věty 10.7. kurzu Markovské řetězce je posloupnost $\{P(Y = k)\}_{k=0}^{\infty}$ n-tou konvoluční mocninou posloupnosti $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$.

10.9. Příklad: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim Bi(n, \vartheta)$, i = 1, 2. Pomocí věty 10.8. určete rozložení transformované náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

Řešení:

$$p_k = \begin{cases} \binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k} \text{ pro } k = 0,1,\dots n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$$P(Y=k) = \{p_k\}^{2*} = p_0 p_k + p_1 p_{k-1} + \dots + p_k p_0 = \binom{n}{0}\vartheta^0(1-\vartheta)^n \binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k} +$$

$$+\binom{n}{1}\vartheta^1(1-\vartheta)^{n-1}\binom{n}{k-1}\vartheta^{k-1}(1-\vartheta)^{n-k+1} + \dots + \binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k}\binom{n}{0}\vartheta^0(1-\vartheta)^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\vartheta^j(1-\vartheta)^{n-j}\binom{n}{k-j}\vartheta^{k-j}(1-\vartheta)^{n-k+j} = \vartheta^k(1-\vartheta)^{2n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{2n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{2n-k}$$

k = 0, 1, ..., 2n. Znamená to, $Y \sim Bi(2n, \vartheta)$.

10.10. Věta: Věta o pravděpodobnostní funkci součtu náhodného počtu stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

Nechť X_1, X_2, … jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny stejnou pravděp. funkci $P(X_i = k) = \begin{cases} p_k \text{ pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}, i = 1,2,\dots$ a N je celočíselná nezáporná náhodná veličina, která má pravděpodobnostní funkci $P(N = n) = \begin{cases} q_n \text{ pro } n = 0,1,2,\dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$. Pak transformovaná náhodná veličina $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (součet náhodného počtu náhodných veličin) má pravděpodobnostní funkci $P(S = k) = \begin{cases} h_k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} \text{ pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

Důkaz: Použijeme vzorec úplné pravděpodobnosti $P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) P(A / H_i)$, kde I je nejvýše spočetná indexová množina a $\{H_i; i \in I\}$ je úplný systém hypotéz. Označme A={S=k}, H_n={N=n}. Pak $P(H_n)$ = P(N=n), $P(A/H_n)$ = P(S=k/N=n) = $P(X_1+\dots+X_N=k/N=n)$ = $P(X_1+\dots+X_n=k)$, ovšem podle věty 10.8. $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \{p_k\}^{n*}$. Po dosazení do vzorce úplné pravděpodobnosti dostaneme

$$P(A) = P(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H_n) P(A / H_n) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*}, k = 0,1,2,\dots$$

10.11. Definice: Definice složeného rozložení.

Rozložení $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ transformované náhodné veličiny $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ se nazývá složené rozložení.

10.12. Příklad: Nechť X_1, X_2, ... jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, 2, ... Nechť N je na nich nezávislá náhodná veličina, $N \sim Po(\lambda)$. Najděte rozložení náhodné veličiny $S = X_1 + \ldots + X_N$.

Řešení: $p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} \text{ pro } k = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, $\{p_k\}^{n*} = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} \text{ pro } k = 0,1,\ldots,n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

$$q_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{pro } n = 0,1,2,\ldots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$$h_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} = e^{-\lambda}\vartheta^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda^n (1-\vartheta)^{n-k} = \left|\lambda^n = \lambda^{n-k*k}\right| =$$

$$= e^{-\lambda}\vartheta^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-\vartheta)]^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda\vartheta)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-\vartheta)]^{n-k}}{(n-k)!} = |j = n-k| =$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda\vartheta)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-\vartheta)]^{j}}{j!} = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda\vartheta)^k e^{\lambda(1-\vartheta)} = \frac{(\lambda\vartheta)^k}{k!} e^{-\lambda\vartheta} \Rightarrow$$

$S \sim Po(\lambda\vartheta)$.

10.13. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny S.
Pro p.v.f. náhodné veličiny S platí $g_S(z) = g_N(g_X(z))$.
Důkaz:

$$g_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sum_{k=0}^{\infty} \{p_k\}^{n*} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n [g_X(z)]^n = g_N(g_X(z))$$

10.14. Příklad: Pro náhodnou veličinu S z příkladu 10.12. odvoďte pravděpodobnostní vytvořující funkci.

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{1} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} z^k = 1-\vartheta+z\vartheta$,

$N \sim Po(\lambda) \Rightarrow g_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$, $g_S(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda(1-\vartheta+z\vartheta-1)} = e^{\lambda\vartheta(z-1)} \Rightarrow S \sim Po(\lambda\vartheta)$.

10.15. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu náhodné veličiny S .
Nechť X_1, X_2, ... jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny totéž rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Nechť N je na nich nezávislá celočíselná nezáporná náhodná veličina. Pak náhodná veličina $S = X_1 + ... + X_N$ má střední hodnotu $E(S) = E(N)\,\mu$ a rozptyl $D(S) = D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$.

Důkaz:

$$E(S) = \frac{d}{dz} g_S(z)\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz} g_N(g_X(z))\Big|_{z=1} = g_N'(g_X(z))g_X'(z)\Big|_{z=1} = g_N'(g_X(1))g_X'(1) =$$
$$= g_N'(1)g_X'(1) = E(N)E(X) = E(N)\mu$$

$D(S) = \frac{d^2}{dz^2} g_S(z)\Big|_{z=1} + E(S) - [E(S)]^2$. Nejprve spočteme 2. derivaci p.v.f. v bodě z=1:

$$\frac{d^2}{dz^2} g_S(z)\Big|_{z=1} = g_N''(g_X(z))g_X'(z)^2\Big|_{z=1} + g_N'(g_X(z))g_X''(z)\Big|_{z=1} = g_N''(1)g_X'(1)^2 + g_N'(1)g_X''(1) =$$
$$= g_N''(1)\mu^2 + E(N)g_X''(1)$$

Ze vzorce pro rozptyl plyne, že $g_N''(1) = D(N) - E(N) + [E(N)]^2$, $g_X''(1) = \sigma^2 - \mu + \mu^2$, tedy

$\frac{d^2}{dz^2} g_S(z)\Big|_{z=1} = D(N)\mu^2 - E(N)\mu^2 + [E(N)]^2\mu^2 + E(N)\sigma^2 - E(N)\mu + E(N)\mu^2$. Po dosazení:

$$D(S) = D(N)\mu^2 - E(N)\mu^2 + [E(N)]^2\mu^2 + E(N)\sigma^2 - E(N)\mu + E(N)\mu^2 + E(N)\mu - [E(N)]^2\mu^2 =$$
$$= D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$$